Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II - 1º Semestre 2001/2002
2º Exame - 25 de Janeiro de 2001 - 9 h

Todos os cursos excepto Eng. Civil, de Território, Física Tecnológica e Lic. Matemática

Duração: 3h

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Indique todas as primitivas das funções seguintes:

(1.5 val.) (a) $\dfrac{x^2+\cosh 3x}{x^3+\sinh 3x} \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

(1.5 val.) (b) $\dfrac{x \sin x}{\cos^3 x} \qquad x \in]-\pi/2, \pi/2[$

(2.5 val.) **2.** Calcule a área plana finita contida entre os gráficos das funções $f(x) = x^3$, $g(x) = -x$ e a recta $y = 1$, e o volume do corpo de revolução obtido rodando essa área à volta do eixo dos x.

(2.5 val.) **3.** Primitive a função

$$h(x) = \frac{(x+1)^2 + x^3}{(x^2+1)^2}$$

e aproveite o resultado para calcular o integral impróprio $\int_1^\infty h(x)\,dx$.

4. Seja $K : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ a função definida por

$$K(x) = (x^2+1)\int_{-1}^{x^2} f(t)\,dt$$

onde $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é de classe C^1.

(1 val.) (a) Mostre: $K''(1) - K'(1) = 8(f'(1) + f(1))$.

(1 val.) (b) Se K se anula para algum valor de x, mostre que f se anula para algum valor de t.

5. Considere a função f definida por $f(x,y) = \log|x^2 - y|$ e designe por D o seu domínio.

(1.5 val.) (a) Determine o interior e a fronteira de D e indique, justificando, se D é aberto, fechado, limitado, conexo.

(2 val.) (b) Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$h(u,v) = (2u - v^2, u^2 - v^2)$$

Calcule o vector $\nabla(f \circ h)$ no ponto $(1,1)$.

6. Considere a função $g(x,y) = y \arctan \dfrac{x}{y}$.

(1 val.) (a) Indique, justificando, o domínio D de diferenciabilidade de g.

(1 val.) (b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ com $(x,y) \in D$.

(1 val.) (c) Determine a derivada de g segundo o vector (h,h), com $h \neq 0$, no ponto $(1,1)$.

(1.5 val.) (d) Mostre que g é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.
[Sugestão: Pode usar a desigualdade $|\arctan x| \leq |x|$].

(2 val.) **7.** Considere a função $h : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{2x_1^2 - 2x_1 + 1}^{x_1^2 + \cdots + x_n^2} f(t)\, dt$$

onde $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ é de classe C^1. Tendo f um mínimo local positivo para $t = 1$, diga justificando se h tem extremo local no ponto $(1, 0, \ldots, , 0)$.