Análise Matemática II

1º exame

25 de Junho de 2003

Licenciaturas em Ciências Informáticas, Engenharia Aeroespacial, Engenharia Física Tecnológica e Matemática Aplicada e Computação

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(11,0) **I.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{(t^2+1)^2}}, \quad g(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t - \operatorname{sen} t}, \quad h(t) = \frac{t}{t^4+2t^2+2}.$$

2. Calcule o integral

$$\int_{-1}^{1} (2t^2-1)e^{t^2}\,dt.$$

[**Sugestão:** Use integração por partes para relacionar $\int_{-1}^{1} t^2 e^{t^2}\,dt$ com $\int_{-1}^{1} e^{t^2}\,dt$.]

3. Considere os gráficos das funções $g_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$g_1(x) = x^2/2,$$
$$g_2(x) = \cos x.$$

Decida qual dos dois gráficos tem maior comprimento.

4. Seja $F : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ uma função contínua.

a) Determine para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ existe o integral (no sentido de Riemann)

$$\int_a^b \frac{F(t)}{\log t}\,dt.$$

b) Determine o domínio da função definida em $A \subset \mathbb{R}^2$ por

$$\psi(x,y) = \int_{\frac{x+y}{2}}^{4xy} \frac{F(t)}{\log t}\,dt$$

em que A é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tal que o integral está definido.

c) Mostre que o conjunto A da alínea anterior pode ser representado pela união de dois conjuntos disjuntos abertos e conexos um dos quais é limitado e o outro ilimitado.

d) Classifique o conjunto A das alíneas anteriores quanto a ser *aberto*, *fechado*, *limitado* ou *compacto*. Identifique a *fronteira* de A.

e) Obtenha uma expressão, em termos de F calculada em pontos convenientes, para a derivada parcial $\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

(6,0) **II.** 1. a) Determine a representação em termos de uma série de potências de x da função $x \mapsto x \log(1+x)$ válida numa vizinhança de 0 e determine a maior vizinhança nessas condições.

b) Determine um polinómio $P(x,y)$ de grau menor ou igual a 6 tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\log(1+x^2+y^2) - P(x,y)}{(x^2+y^2)^3} = 0.$$

2. Seja $H(x,y) = xy^2 - x^2y + x^2y^2$. Estude H quanto a existência de extremos relativos e absolutos determinando-os ou justificando que não existem.

3. Considere $\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que o determinante da matriz jacobiana de ϕ toma valores de sinais opostos e nunca se anula. Mostre que existe um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla\phi_1(x,y)$ e $\nabla\phi_2(x,y)$ são vectores colineares.

(3,0) **III.** 1. Estude quanto a continuidade e diferenciabilidade a função $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Seja $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ uma sucessão tal que $\sum k^2 a_k$ é uma série absolutamente convergente. Justifique que

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \operatorname{sen}(kx) e^{-ky}$$

define para $(x,y) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ uma função de classe C^2 que satisfaz

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Esboço de solução e comentários

Tentarei adicionar nas margens referências bibliográficas. Comentários aparecerão a vermelho.

I. 1. i.

$$\int f(t)\,dt = \int \frac{t}{\sqrt[3]{(t^2+1)^2}}\,dt = \int t(t^2+1)^{-2/3}\,dt = \frac{3}{2}(t^2+1)^{1/3}.$$

[1, pág. 469, Teorema 1]

Todas as outras primitivas de f diferem desta por uma constante.

ii.

$$\int g(t)\,dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t - \operatorname{sen} t}\,dt = \int \frac{\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t}\,dt$$

[1, pág. 510, Exercício 27.j)]

[Note-se que $\frac{\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg} t}$ não está definida quando $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ ao contrário da função original. Ignoraremos este "detalhe" temporariamente e voltaremos a ele no final.]

[1, pág. 503 e 504]

Sendo g a composição de uma fracção racional com $\operatorname{tg} t$ podemos reduzir esta primitiva de uma fracção racional através da mudança de variável $u = \operatorname{tg} t$ ou $\operatorname{arctg} u = t$ sendo $\frac{dt}{du} = \frac{1}{1+u^2}$. Obtém-se, usando decomposição em fracções simples,

$$\int \frac{u}{1-u}\,\frac{1}{1+u^2}\,du = \int \frac{\alpha}{u-1} + \frac{\beta u + \gamma}{1+u^2}\,du$$

para algumas constantes α, β e γ a determinar a partir de $-u = \alpha(1+u^2) + (\beta u + \gamma)(u-1)$, isto é, do sistema que se obtém comparando coeficientes,

$$\begin{cases} 0 = \alpha - \gamma \\ -1 = -\beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \gamma = 1/2 \\ \beta = -1/2 \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{u}{1-u}\,\frac{1}{1+u^2}\,du &= \int \frac{1}{2(u-1)} + \frac{-u+1}{2(1+u^2)}\,du \\ &= \frac{1}{2}\log|u-1| + \int \frac{-2u}{4(1+u^2)}\,du + \int \frac{1}{2(1+u^2)}\,du \\ &= \frac{1}{2}\log|u-1| - \frac{1}{4}\log(1+u^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u \end{aligned}$$

e portanto obtemos

$$\int g(t)\,dt = \frac{1}{2}\log|\operatorname{tg} t - 1| - \frac{1}{4}\log(1+\operatorname{tg}^2 t) + \frac{t}{2}$$

g não estava definida para $\frac{\pi}{4}+k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$; podemos adicionar constantes distintas em cada intervalo $\left]\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+(k+1)\pi\right[$ para obter distintas primitivas de g.
Uma *melhor*[1] primitiva de g é a função definida por

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log|\operatorname{tg} t - 1| - \frac{1}{4}\log(1+\operatorname{tg}^2 t) + \frac{t}{2}, & \text{se } t \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ para todo o } k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, & \text{se } t = \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

que corresponde a calcular o limite nos pontos $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Veja-se a nota inicial quando se dividiu por $\cos t$. Como é que justificaria que esta função é de facto diferenciável nos pontos em que se calculou o limite?

iii.

$$\int h(t)\,dt = \int \frac{t}{t^4+2t^2+2}\,dt = \int \frac{t}{(t^2+1)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2+1).$$

Todas as primitivas de h diferem da função calculada por uma constante.

2. Seguindo a sugestão

$$\int_{-1}^{1} 2t^2e^{t^2}\,dt = \int_{-1}^{1} t\cdot 2te^{t^2}\,dt = [te^{t^2}]|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{t^2}\,dt = 2e - \int_{-1}^{1} e^{t^2}\,dt$$

pelo que o valor do integral é $2e$.

[1, pág. 584, Teorema 14]

3. Os gráficos de g_1 e g_2 terão comprimentos

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}.$$

Como $\operatorname{sen}^2 x < x^2$ excepto para $x=0$ obtemos que o maior comprimento é o do gráfico da função g_1.

4. Seja $F : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ uma função contínua.

a) O integral

$$\int_a^b \frac{F(t)}{\log t}\,dt$$

vai existir no sentido de Riemann (isto é, o estudado em AMII) sempre que a função integranda esteja definida no intervalo de extremos a e b (note-se que nada impede que $b \leq a$), aí seja limitada e satisfaça condições que garantam a existência do integral. Como F é uma função contínua a função integranda é contínua sempre que estiver definida e

[1, pág. 521, Teorema 3]

portanto será integrável no intervalo fechado de extremos a e b se o logaritmo estiver definido em todos os pontos desse intervalo e não seja 0.

Assim o integral está definido sempre que $a, b \in]0, 1[$ ou $a, b \in]1, +\infty[$.

b) De acordo com a alínea anterior

$$\int_{\frac{x+y}{2}}^{4xy} \frac{F(t)}{\log t}\, dt$$

define um integral que existe sempre que tenhamos

$$\begin{cases} 0 < \frac{x+y}{2} < 1 \\ 0 < 4xy < 1 \end{cases} \tag{1}$$

ou

$$\begin{cases} 1 < \frac{x+y}{2} \\ 1 < 4xy \end{cases} \tag{2}$$

O conjunto A será formado por todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verificam ou (1) ou (2).

c) As condições (1) e (2) de facto definem dois subconjuntos disjuntos abertos e conexos sugeridos na figura 1.

Que A_1 e A_2 são conexos é uma consequência de serem obviamente conexos por arcos e serem abertos é uma consequência de não incluirem nenhum dos seus pontos fronteiros (que incluem porções dos eixos coordenados, do ramo de hipérbole $4xy = 1$ no 1º quadrante e da recta $x + y = 2$). Uma justificação formal completa destas afirmações não era pretendida. Note-se que uma justificação rápida de que se tratam de conjuntos abertos pode ser obtida usando o facto das aplicações $(x, y) \mapsto xy$ e $(x, y) \mapsto x + y$ serem contínuas, a imagem inversa de conjuntos abertos por aplicações contínuas ser um conjunto aberto e a intersecção de um número finito de conjuntos abertos ser necessariamente um conjunto aberto. Prove estas duas últimas afirmações...

d) A é aberto (é a união de dois abertos), não é fechado pois não inclui os seus pontos fronteiros, não é limitado pois, por exemplo, inclui todos os pontos da forma (n, n) com $n \in \mathbb{N}_1$ e não sendo fechado (ou limitado)

[1]Claro que esta *é* a solução do problema original mas admitimos como solução completa a anterior.

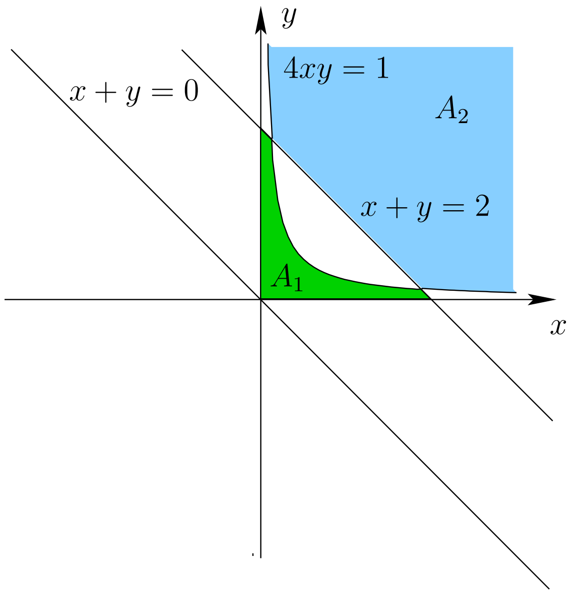

Figura 1: Esboço do domínio da função ψ. Designaram-se por A_1 e A_2 os conjuntos determinados por (1) e (2) respectivamente.

não é compacto. A fronteira de A, ∂A, é

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4xy = 1, x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y=2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [0,2]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in [0,2]\}.$$

Qualquer bola centrada num destes pontos contém pontos de A e de $\mathbb{R}^2 \setminus A$ e não existem outros pontos nestas condições.

[1, pág. 541, Teorema 16]

[2, pág. 104, Teorema 4.4]

e) Usando o teorema fundamental do cálculo (legítimo porque a função integranda é contínua) e o teorema de derivação da função composta obtém-se

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4y \frac{F(4xy)}{\log(4xy)} - \frac{1}{2} \frac{F(\frac{x+y}{2})}{\log(\frac{x+y}{2})}.$$

(6,0) **II.** 1. a) Determine a representação em termos de uma série de potências de x da função $x \mapsto x \log(1+x)$ válida numa vizinhança de 0 e determine a maior vizinhança nessas condições.

b) Determine um polinómio $P(x,y)$ de grau menor ou igual a 6 tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\log(1+x^2+y^2) - P(x,y)}{(x^2+y^2)^3} = 0.$$

2. Como H é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ os pontos de extremo serão soluções do sistema de estacionaridade

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy + 2xy^2 = 0 \\ 2xy - x^2 + 2x^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y - 2x + 2xy) = 0 \\ x(2y - x + 2xy) = 0 \end{cases}$$

Encontramos imediatamente uma solução que é $(x, y) = (0, 0)$. Todas as outras eventuais soluções deverão verificar

$$\begin{cases} y - 2x + 2xy = 0 \\ 2y - x + 2xy = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Subtraindo as duas equações deste sistema termo a termo obtemos que qualquer solução adicional deverá verificar $-y - x = 0$, ou seja, $y = -x$. Reintroduzindo esta condição numa das equações de (3) obtemos $-3x - 2x^2 = 0$. Esta equação tem soluções $x = 0$ (que nos levaria a uma solução já determinada) e $x = -3/2$ a que corresponde $y = 3/2$.

Portanto o sistema de estacionaridade tem duas soluções: $(0, 0)$ e $(-3/2, 3/2)$. Analisemos cada uma destas usando a fórmula de Taylor.

Em $(0, 0)$ como a função já tinha sido dada como um polinómio em (x, y) basta reconhecer que o termo de menor ordem não nulo é de ordem 3 pelo que $(0, 0)$ é um ponto de sela.

Em $(-3/2, 3/2)$ calculamos as derivadas de segunda ordem de H obtendo

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -2y + 2y^2,$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 2y - 2x + 4xy,$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 2x + 2x^2.$$

Assim a matriz hessiana de H em $(-3/2, 3/2)$ é

$$\begin{bmatrix} 3/2 & -3 \\ -3 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem determinante negativo pelo que $(-3/2, 3/2)$ é também um ponto de sela.

Pode parecer surpreendente que esta função não tenha um ponto de extremo embora seja um polinómio de quarto grau tal que $H(x, 0) = 0$, $H(0, y) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} H(x, cx) = +\infty$ para todo o $c \neq 0$. De facto o que tais cálculos mostram é que o único tipo de extremo absoluto que poderia existir é um mínimo. Uma maneira elementar de perceber o que se está a passar (e ilustrar os perigos de tentar perceber o que se passa para funções de mais de uma variável restringindo-as a rectas) é notar que sobre os ramos de hipérbole $y = 1/x$ temos $H(x, 1/x) = \frac{1}{x} - x + 1 \to \pm\infty$ quando $x \to \mp\infty$.

3. Considere $\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que o determinante da matriz jacobiana de ϕ toma valores de sinais opostos e nunca se anula. Mostre que existe um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla\phi_1(x, y)$ e $\nabla\phi_2(x, y)$ são vectores colineares.

III. 1. No complementar da origem Γ é uma fracção racional cujo denominador não se anula pelo que $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ e em particular é contínua e diferenciável.

Para estudar a continuidade em $(0,0)$ notamos que

$$\begin{aligned}
|\Gamma(x,y) - \Gamma(0,0)| = \left|\frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}\right| &\leq \frac{|x|^3 + y^4}{x^2 + y^2} \\
&\leq \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} + (x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 \to 0 \text{ quando } (x,y) \to 0,
\end{aligned}$$

pelo que temos continuidade em $(0,0)$.

Para estudarmos a diferenciabilidade em $(0,0)$ começamos por calcular as derivadas parciais de Γ em $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(h,0) - \Gamma(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1, \\
\frac{\partial\Gamma}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(0,h) - \Gamma(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4/h^2}{h} = 0.
\end{aligned}$$

Da definição de diferenciabilidade segue que Γ será diferenciável em $(0,0)$ se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Gamma(h,k) - \Gamma(0,0) - h\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial\Gamma}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

o que corresponde a estudar o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+k^4}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Ora

$$\frac{\frac{h^3+k^4}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^3 + k^4 - h^3 - hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = \frac{k^4 - hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}.$$

A presença de uma parcela de 3º grau no numerador e um denominador de 3º "grau" sugerem fortemente a não existência de limite. Com efeito, restringindo a função de (h,k) cujo limite estamos a estudar a uma recta $h = \alpha k$, obtemos

$$\frac{k^4 - \alpha k^3}{(2^{3/2}(\alpha^2+1)^{3/2}k^3)} \to \frac{-\alpha}{(2^{3/2}(\alpha^2+1)^{3/2})} \neq 0 \text{ se } \alpha \neq 0 \text{ quando } k \to 0,$$

pelo que o limite não existe e a função não é diferenciável em $(0,0)$.

2. Admitindo temporariamente que podemos derivar termo a termo a série original e as séries que obtemos por este processo teríamos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k \cos(kx) e^{-ky},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k \operatorname{sen}(kx) e^{-ky},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k \operatorname{sen}(kx) e^{-ky},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 a_k \operatorname{sen}(kx) e^{-ky}$$

e daí φ satisfazer a igualdade pretendida.

Para justificar o cálculo anterior notamos que todas as séries que considerámos até ao momento têm um termo geral que, em módulo, é menor ou igual $k^2|a_k|$ se $y \geq 0$. Como a série $\sum k^2|a_k|$ é convergente podemos invocar o critério de Weierstrass para garantir que se tratam de séries uniformemente convergentes para $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$. Isso permite garantir que as diferenciações formais são de facto válidas.

Note-se que a hipótese $\sum k^2 a_k$ absolutamente convergente não é de facto necessária. Outras hipóteses mais fracas são possíveis: por exemplo a sucessão $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ser limitada. O argumento para justificar a convergência uniforme é porém mais complicado e tem que ser efectuado para $(x,y) \in \mathbb{R} \times [y_0,+\infty[$ para um qualquer $y_0 > 0$. Forneça os detalhes. Tente usar $k^p e^{-ky} \leq C_p e^{-ky_0/2}$ com $p = 0,1,2$ e C_p uma constante dependente de p e y_0.

Referências

[1] Jaime Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1985.

[2] Jaime Campos Ferreira. Introdução à Análise em $\mathbb{R}^n$. Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico, 2003. Pré-publicação electrónica disponível em http://www.math.ist.utl.pt/textos/iarn.pdf.