Análise Matemática II

26 de Junho de 00

Ele., Eng. Bio., Eng. Quí., Ges. e Quí.

2º Teste	–	Perguntas 4, 5, 6 e 7a) – d)	–	90 minutos
1º Exame	–	Todas as Perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Calcule (4)

$$\int_0^1 e^{\pi x}\,dx, \qquad \int_4^5 \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx, \qquad \int_0^1 \log(x^2+1)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-R}^{R} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,$$

onde $R \in \mathbb{R}$. Calcule ainda o limite quando $R \to +\infty$ do quarto integral.

2. Calcule a derivada de $x \mapsto \int_x^{2x} e^{t^2}\,dt$. (2)

3. Considere o conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ e } \sin x \leq y \leq \cos x\}$.

a) Esboce S e calcule a sua área. (1)

b) Identifique $\operatorname{int} S$, $\operatorname{ext} S$ e ∂S e diga se S é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado. (1)

4. Calcule o desenvolvimento de $x \mapsto \frac{1}{x}$ em série de potências em torno de 1, indicando a região onde é válido. (1.5)

5. Calcule ou mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$. (1.5)

6. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que $g(x,y) = (e^{xy^2}, e^{x^2y}, xy)$, f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, $f(1,1,0) = (1,0)$ e (2)

$$f'(1,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Identifique as aplicações $(g \circ f)'(1,1,0)$ e $(f \circ g)'(1,0)$.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 e^y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3$.

a) Determine os pontos de estacionaridade de f. (1)

b) Determine os planos tangentes ao gráfico de f nos pontos $(0,0,0)$, $\left(0,1,\frac{1}{6}\right)$ e $\left(0,-1,\frac{5}{6}\right)$. (1.5)

c) Com auxílio da fórmula de Taylor de 2ª ordem para campos escalares, classifique os pontos de estacionaridade de f. (2)

d) Determine se f é majorada ou minorada. (0.5)

e) Determine se o conjunto de nível zero de f, ou seja $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$, é *limitado* e ainda se é *conexo*. Caso o conjunto seja desconexo, escreva- -o como união de dois conjuntos separados não vazios. (1)

f) Determine para que valores de $c \in \mathbb{R}$, o conjunto de nível c de f é conexo. (1)