Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

LEEC e LEGI - 1º exame

Data: 26/6/2001

I.

1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes:
$$2\,\mathrm{sen}\,x\,.\,e^{\cos x}, \qquad \frac{e^x}{2+3e^{2x}}, \qquad \frac{\cos x}{1+\,\mathrm{sen}\,x}.$$

2. Determine a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ que satisfaz
$$f'(x) = \frac{4}{(x-1)(x^2+3)}\ ,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,.$$

3. Calcule a área da região plana delimitada pela recta tangente ao gráfico de $\log x$ no ponto $(e, 1)$, pela recta vertical $x = 1$ e pelo gráfico de $\log x$.

4. Desenvolva em série de Taylor relativa ao ponto 0 a função
$$f(x) = x^2 + x\arctan x, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$
e determine o maior intervalo aberto onde a série representa a função.

II.

1. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ e seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$\varphi(x, y) = \int_{y-x}^{x+y} f(t)\,dt.$$
Mostre que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$.

2. Calcule (se existirem em $\mathbb{R}$), os seguintes limites:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y^2+\arctan(xy)}\ , \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}\ .$$

3. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $(1,1)$, com a seguinte matriz jacobiana nesse ponto:

$$M_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \arctan(x^2 - y^2).$$

a) Determine $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(1,1)$, onde $v = (2,1)$.

b) Determine, se existirem, os extremos locais de f.

c) Diga, justificando, qual o contradomínio de f.

d) Supondo que $\varphi(1,1) = (0,1)$, calcule $(f \circ \varphi)'(1,1)$.

III.

a) Prove que não existe nenhuma função f em $C^2(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo simultaneamente as condições seguintes:

$$\begin{aligned} & f(n) = f(m)\,, && \forall m, n \in \mathbb{N}^+\,, && (1) \\ & f'(n) = n\,, && \forall n \in \mathbb{N}^+\,, && (2) \\ & f'' \text{ limitada em } \mathbb{R}^+\,. && && (3) \end{aligned}$$

[Sugestão: use o teorema de Taylor para a função f em intervalos $[a,b]$ com a e b convenientemente escolhidos].

b) Mostre, através de exemplos, que se suprimíssemos uma qualquer das condições (1), (2) ou (3), o resultado da alínea a) seria falso.