Análise Matemática II

1º exame

26 de Junho de 2001

Licenciaturas em Engenharia Química,
Química e Engenharia Biológica

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(11,0) **I.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{1+\sec^2 x}{x+\operatorname{tg} x}, \quad \text{b)}\ \frac{x}{\cos^2 x}, \quad \text{c)}\ \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}.$$

2. Calcule o integral

$$\int_{-1}^{1} t^7 \cos(t^2)\, dt.$$

3. Calcule a área da região do plano definida por

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2|x| \leq y \leq 1+x^2, y \leq x+1\}.$$

4. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determine o domínio de diferenciabilidade desta função e o valor do seu gradiente.

b) Para cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ determine as direcções (h,k) que tornam a derivada dirigida $D_{(h,k)}f(x,y)$ nula.

5. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (x+1)\log(x^2 + 2x + 2)$. Determine a respectiva série de Taylor em potências de $x+1$ e o maior intervalo aberto em que a série representa a função.

(6,0) **II.** 1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que o determinante da sua matriz jacobiana satisfaz $\det J_F(u,v) = e^u$ para todo o $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(x,y) = (x^2-y^2, x^2y^2)$. Considere $\varphi = F \circ \psi$. Calcule o determinante da matriz jacobiana de φ num ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $\sum a_k$ uma série convergente de termos não negativos. Mostre que uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k^2} e^{-kx} \operatorname{sen} ky$$

satisfaz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{para } x > 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}.$$

3. Considere $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$.
   a) Determine os pontos de estacionaridade de h.
   b) Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimo local de h.
   c) Mostre que h não possui pontos de máximo absoluto e determine o(s) ponto(s) de mínimo absoluto.
   d) Determine os pontos de extremo absoluto da restrição de h à bola fechada de raio 2 centrada em $(0,0)$ [**Sugestão**: parametrize a fronteira da bola usando coordenadas polares e note que $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$.].

(3,0) **III.** 1. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, não-negativa e limitada em $]0, +\infty[$ e uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua e definida por

$$\phi(x,y) = \int_{(x^4+y^4)^{1/4}}^{(x^2+y^2)^{1/2}} f(t)\, dt, \qquad \text{para } (x,y) \neq (0,0).$$

   a) Calcule $\phi(0,0)$.
   b) Determine $\nabla\phi(x,y)$ em termos de f para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   c) Mostre que se $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ então ϕ é diferenciável em $(0,0)$ mas que, em geral, isso não é verdade[1].
   d) Mostre que se $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda f(\lambda) = 0$ então ϕ possui pontos de máximo absoluto mas que, em geral, isso não é verdade.
   e) Mostre que o contradomínio de ϕ é um intervalo da forma $[0, C]$, $[0, C[$ ou $[0, +\infty[$ com $C > 0$.

[1] O enunciado original tinha uma gralha nesta linha corrigida a vermelho.