INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II - 1ª Época

(Cursos de Civil e Território)

2º Semestre 98/99 - 28/6/99

1. (2,5 valores) Determine uma primitiva das seguintes funções:

$$\text{a)}\quad \frac{x^2}{1+x^6}, \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{e^{2x}}{(\cosh x)(e^x+2)}$$

2. (2 valores) Para $n > 0$, $m > 0$ seja

$$I(n,m) = \int \frac{\tan^n x}{\cos^m x} dx.$$

Usando primitivação por partes, mostre a fórmula

$$I(n,m+2) = \frac{1}{n+1} \frac{\tan^{n+1} x}{cos^m x} - \frac{m}{n+1} I(n+2,m)$$

para $n > 0$, $m > 0$, e utilize-a para obter $I(6,4)$.

3. (2 valores) Sejam f e g funções reais em $\mathbf{R}$ definidas por

$$f(x) = (x^2-2)^2, \qquad\qquad g(x) = x^2.$$

Indique os valores de x tais que $f(x) = g(x)$. Calcule a área finita contida entre os gráficos de f e g.

4. (2 valores) Seja $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por

$$F(x) = \int_0^{x^3-4x} f(t)\, dt$$

com $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função contínua. Justifique que $F \circ F$ é diferenciável em $\mathbf{R}$ e mostre

$$(F \circ F)'(2) = -32 f(0)^2.$$

5. (1,5 valores) Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor no ponto $\frac{1}{2}$ da função f dada por

$$f(x) = \log x,$$

indicando o maior domínio aberto em que a série representa a função.

6. $(1,5$ valores) Considere o subconjunto de $\mathbf{R}^2$

$$X = \left\{(x, y) | (x \geq 0) \wedge (x^2 \neq y^2)\right\}.$$

Esboce o conjunto X. Indique uma sucessão de termos de X, convergindo para um ponto não pertencente a X. Justificando brevemente, diga se X é a) aberto, b) fechado, c) conexo.

7. Seja $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}.$$

a) $(1,5$ valores) Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ não existe.

b) $(1,5$ valores) Calcule as derivadas parciais de f no seu domínio. Justifique que f é diferenciável no seu domíno.

c) (1 valor) Obtenha o gradiente de f no ponto $(2, 1)$ e a derivada segundo o vector $(1, -1)$ no mesmo ponto.

d) $(1,5$ valores) Seja $\hat{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por $\hat{f}(x, y) = f(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, e por $\hat{f}(0, 0) = 1$. Calcule $D_{\mathbf{e}_1}\hat{f}(0, 0)$ e $D_{\mathbf{e}_2}\hat{f}(0, 0)$. A função $\hat{f}$ é diferenciável em $\mathbf{R}^2$?

e) $(1,5$ valores) Seja $g : \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2$ a função dada por $g(x, y) = (s(x, y),\ t(x, y))$, com

$$s(x, y) = \int_1^{x^2+y^2} \log 2k\, dk, \qquad t(x, y) = f(x, y).$$

Indique a matriz Jacobeana (=matriz derivada) de g no seu domínio. Seja $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por $h(s, t) = e^{s+2t}$. Calcule $\frac{\partial}{\partial x}(h \circ g)(1, 0)$.

8. $(1,5$ valores) Obtenha a expansão de Taylor até ordem 2 no ponto $(1, -1)$ da função $j : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$j(x, y) = x^2 + 2xy + y - y^3.$$

Justifique que $(1, -1)$ é um mínimo relativo de j.