Análise Matemática II

28 de Junho de 99

Ele., Eng. Bio., Eng. Quí., Ges. e Quí.

2º Teste –	Perguntas 5, 6, 7 e 8	– 90 minutos
1º Exame –	Todas as Perguntas	– 3 horas

Apresente os cálculos

1. Calcule (3)

$$\int_0^2 \frac{x}{16+x^4}\,dx, \qquad \int_0^{e^2} \sqrt{x}\,\log\sqrt{x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

2. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}^+$ e $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\,dt$. Mostre que F é diferenciável e $F'(x) = -\frac{1}{x}\left(F(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. Sugestão: Comece por fazer uma mudança de variável. (2.5)

3. Determine a série de Mac-Laurin de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. (2.5)

4. Utilizando o Teorema de Bolzano-Weierstrass, prove que a imagem de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ por uma função vectorial contínua, com valores em $\mathbb{R}^n$, é um conjunto compacto. (2)

5. Prove que a função $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definida por $\phi(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$. (2)

6. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $u(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$. Mostre que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. (2)

7. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2$, e $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

a) Calcule, justificando, a derivada de f em $\mathbf{a}$. (1)
b) Calcule, justificando, $f'(\mathbf{a};\mathbf{v})$. (1)
c) Que informação nos dá $\nabla f(\mathbf{a})$? (1)
d) Calcule a fórmula de Taylor de 2ª ordem de f em $\mathbf{a}$ com resto de Lagrange. (1)

8. Analisando o sinal da função e usando o Teorema de Weierstrass, determine os pontos de estacionaridade de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = (y-x)^2 \times \times (y - x^2)$, e classifique esses pontos. Nota: Um dos pontos é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. (2)