Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$2^{\underline{o}}$ EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2002/2003

07 de Julho de 2003, 10.00 Duração: 3 horas

I (6 val.)

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{\log(x)}{x}$, $x \in]0,+\infty[$; (b) $e^x \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$; (c) $\dfrac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}$, $x \in]0,+\infty[$.

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = x^3 \ , \ y = -x \ \text{ e } \ y = 1 \ .$$

II (6 val.)

Seja g a função definida por:

$$g(x,y) = \sqrt{x+y} \cdot \log(1+xy) \ .$$

(a) Determine e represente graficamente o domínio D da função g. D é aberto? fechado? limitado?

(b) Identifique na figura anterior (ou num duplicado da mesma) os seguintes conjuntos:

- $D_0 = \{(x,y) \in D : g(x,y) = 0\} \equiv$ curva de nível zero de g;
- $D_+ = \{(x,y) \in D : g(x,y) > 0\}$;
- $D_- = \{(x,y) \in D : g(x,y) < 0\}$.

Qual é o contradomínio da função g? Justifique.

(c) Calcule e represente de forma apropriada na figura da alínea anterior o vector ∇g no ponto $(1,0)$.

(d) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$h(t) = (te^t, \sin(2t)) \ .$$

Calcule a derivada de $h \circ g$ no ponto $(1,0)$.

III (4 val.)

Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cos(x+y)}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Para qualquer vector $v = (a,b) \neq (0,0)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

(c) A função f é diferenciável no ponto $(0,0)$? Justifique.

IV (4 val.)

1. Desenvolva a função $\log(x^2+2x+2)$ em série de potências de $(x+1)$. Qual o "maior" intervalo aberto em que a série representa a função?

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Justifique que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t)\ dt\ ,$$

é diferenciável e mostre que $\varphi'(x) > 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = 4xy - (x+y)^2(x-y)\ .$$

Determine os pontos de estacionaridade de g. Classifique-os quanto a serem pontos de extremo local ou pontos de sela.