Análise Matemática II

2º exame

9 de Julho de 2003

Licenciaturas em Ciências Informáticas, Engenharia Aeroespacial, Engenharia Física Tecnológica e Matemática Aplicada e Computação

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(11,0) **I.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$f(t) = t\log^2 t, \qquad g(t) = \frac{t}{t^4-1}, \qquad h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}.$$

2. Calcule a área da região plana A definida por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 4x,\ xy \le 1\}.$$

3. Seja $f(x,y,z) = xye^{zx}$. Determine

$$\max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3, |\boldsymbol{u}|=1} D_{\boldsymbol{u}} f(1,1,1).$$

4. Obtenha ou refute a estimativa

$$\int_0^1 e^{t^2}\,dt > 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10}.$$

[**Nota e Sugestão:** A função não é elementarmente primitivável... Taylor...]

5. Nesta questão $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e sobrejectiva. Para cada uma das afirmações seguintes decida se a afirmação é verdadeira ou falsa demonstrando-a ou exemplificando conforme apropriado.

   i) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : F(\boldsymbol{x}) < a\}$ é aberto para todo o $a \in \mathbb{R}$.

   ii) A fronteira de $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : F(\boldsymbol{x}) < 0\}$ é $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : F(\boldsymbol{x}) = 0\}$.

   iii) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \le F(\boldsymbol{x}) \le 1\}$ é compacto.

   iv) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \le F(\boldsymbol{x}) < 1 \text{ ou } 1 < F(\boldsymbol{x}) \le 2\}$ não é conexo.

(6,0) **II.** 1. Determine um polinómio de grau menor ou igual a 4, $P(\lambda)$, tal que

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2) - P(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

2. Determine o desenvolvimento em série de Taylor em potências de $(x-1)$ da função $x^{3/2}$ e o maior intervalo aberto em que esta representa a função.

3. Seja $H(x,y) = xy^2 - x^2y + x^4 + y^4$.

   a) Mostre que $(0,0)$ é um *ponto de estacionaridade* de H e classifique-o quanto a ser um ponto de extremo local (máximo ou mínimo) ou ponto de sela.

   b) Mostre que existe pelo menos mais um ponto de estacionaridade de H que é um ponto de mínimo absoluto.

4. Seja $h :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e define-se $G :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ via

$$G(x,y) = \int_{y/x}^{xy} h(t)\,dt.$$

   a) Obtenha as derivadas parciais de G em termos de h calculada em pontos convenientes.

   b) Mostre que $\nabla G(x,y) = 0$ se e só se (x,y) é tal que $xy = c_1$ e $y/x = c_2$ com c_1 e c_2 zeros[1] da função h.

(3,0) **III.** 1. Estude quanto a continuidade e diferenciabilidade a função $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Seja $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Decida se

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \eta(\mathrm{sen}(kx))\, e^{-ky}$$

define ou não uma função de classe C^∞ para $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, cujas derivadas parciais se podem calcular por derivação termo a termo.

[1] Correcção ao enunciado original indicada durante o exame.

Esboço de solução e comentários

Sendo isto um segundo exame estas notas são minimalistas limitando-se às perguntas que podem parecer mais fora do vulgar.

(11,0) **I.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$f(t) = t\log^2 t, \qquad g(t) = \frac{t}{t^4-1}, \qquad h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}.$$

2. Calcule a área da região plana A definida por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 4x,\ xy \leq 1\}.$$

3. O máximo da derivada dirigida segundo um vector unitário de uma função diferenciável num certo ponto é a norma do gradiente nesse ponto. Como f é diferenciável e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{zx} + xyze^{zx}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{zx}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2ye^{zx}$$

obtemos

$$\max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3, |\boldsymbol{u}|=1} D_{\boldsymbol{u}}f(1,1,1) = |(2e,e,e)| = \sqrt{6}e.$$

Se necessário convença-se que a afirmação usada nesta alínea é verdadeira usando a fórmula para a derivada dirigida de uma função diferenciável e a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

4. Obtenha ou refute a estimativa

$$\int_0^1 e^{t^2}\,dt > 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10}.$$

[**Nota e Sugestão:** A função não é elementarmente primitivável… Taylor…]

5. i) A afirmação é verdadeira. Seja $\boldsymbol{x}_0 \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : F(\boldsymbol{x}) < a\}$. Então $F(\boldsymbol{x}_0) < a$. Seja $\delta = a - F(\boldsymbol{x}_0)$. A continuidade em $\boldsymbol{x}_0$ garante que existe $\epsilon > 0$ tal que se $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}| < \epsilon$ então $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x}_0)| < \delta$ e portanto $F(\boldsymbol{x}) < a$. Isto mostra que o conjunto é formado exclusivamente por pontos interiores, isto é, é aberto.

ii) A afirmação é falsa. Considere-se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < -1, \\ 0, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ x-1, & \text{se } 1 < x. \end{cases}$$

Então $\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 0\} =]-\infty, -1[$, $\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 0\} = [-1, 1]$ e a fronteira do primeiro destes conjuntos é o conjunto singular $\{-1\}$.

iii) A afirmação é falsa. Considere-se a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = x$. Temos que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F(x, y) \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ que não é um conjunto limitado e portanto não é compacto.

iv) A afirmação é verdadeira. Suponhamos que era falsa. Então o conjunto era conexo e a sua imagem por F seria também conexa (consequência do *teorema do valor intermédio*). Mas como F é sobrejectiva essa imagem conexa é exactamente $[0, 1[\, \cup \,]1, 2]$ que não é um conjunto conexo (os conexos de $\mathbb{R}$ são os intervalos). Note que sem a hipótese de sobrejectividade a afirmação é falsa. Construa um exemplo.

(6,0) **II.** 1. Determine um polinómio de grau menor ou igual a 4, $P(\lambda)$, tal que

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + y^2) - P(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

2. Determine o desenvolvimento em série de Taylor em potências de $(x-1)$ da função $x^{3/2}$ e o maior intervalo aberto em que esta representa a função.

3. Seja $H(x, y) = xy^2 - x^2y + x^4 + y^4$.

   a) Mostre que $(0, 0)$ é um *ponto de estacionaridade* de H e classifique-o quanto a ser um ponto de extremo local (máximo ou mínimo) ou ponto de sela.

   b) Mostre que existe pelo menos mais um ponto de estacionaridade de H que é um ponto de mínimo absoluto.

4. Seja $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e define-se $G :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ via

$$G(x, y) = \int_{y/x}^{xy} h(t)\, dt.$$

   a) Obtenha as derivadas parciais de G em termos de h calculada em pontos convenientes.

   b) Mostre que $\nabla G(x, y) = 0$ se e só se (x, y) é tal que $xy = c_1$ e $y/x = c_2$ com c_1 e c_2 zeros[2] da função h.

(3,0) **III.** 1. Estude quanto a continuidade e diferenciabilidade a função $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida

[2] Correcção ao enunciado original indicada durante o exame.

por

$$\Gamma(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2. Seja $\eta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Decida se

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\eta(\operatorname{sen}(kx))\,e^{-ky}$$

define ou não uma função de classe C^∞ para $x\in\mathbb{R}$, $y>0$, cujas derivadas parciais se podem calcular por derivação termo a termo.