7.18 Estude quanto a continuidade a função f de $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2+y^2<2y, \\ |x|, & \text{se } x^2+y^2=2y, \\ y^2, & \text{se } x^2+y^2>2y. \end{cases}$$

(Prova de Análise Matemática III de 27/4/81)

7.19 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(0,0) = 0$$
$$f(x,y) = \frac{y-2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0)$$

a) Prove que esta função não é contínua em $(0,0)$.

b) Considere a restrição desta função ao conjunto $D = \{(x,y) : |y| \leq x^2\}$. Prove que esta restrição de f é contínua em $(0,0)$.

c) Verifique que a conclusão da alínea anterior não seria válida se, em vez da restrição a D, considerássemos a restrição a $D_k = \{(x,y) : |y| \leq \frac{|x|}{k}\}$ $(k \in \mathbb{R}^+)$.

7.3 Diferenciabilidade

7.20 Seja f a função definida pela expressão $f(x,y) = \sqrt{x/(x+y)}$.

a) Determine o domínio D de f e interprete-o geometricamente.

b) Indique o interior, exterior e fronteira de D. Será D aberto? E fechado?

c) Justifique que D não é limitado nem conexo.

d) Dê um exemplo de uma sucessão de elementos de D que convirja para um ponto não pertencente a D.

e) Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,0)$ sendo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(Grupo I1 da Prova de 15/9/78)

7.21 Considere uma função real f, definida em $\mathbb{R}^2$ e tal que, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = 1 + xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

1. Se f for contínua na origem, qual será o valor de $f(0,0)$? Justifique.
2. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)$, onde a é um número real (para o caso $a=0$, suponha $f(0,0)=1$).

(Grupo IIIa do Exame Final de 18/9/79)

7.22 Determine o domínio e calcule as derivadas parciais de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)} \quad f(x,y) = \frac{x \operatorname{sh} y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \text{b)} \quad g(x,y) = \int_1^{x^2y} e^{-t^2}\,dt.$$

(Grupo I1 da Prova de 17/10/77)

7.23 Seja g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e $G(x,y)=\int_0^{xy^2} g(t)\,dt$. Calcule

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \text{ e } \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}.$$

(Grupo IIIb do Exame de 23/2/79)

7.24 Seja f a função definida pela expressão

$$f(x,y,z)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}.$$

a) Determine o domínio D de f e interprete-o geometricamente.

b) Indique o interior, exterior e fronteira de D. Será D aberto? E fechado?

c) Dê um exemplo de uma sucessão de elementos de D que não tenha subsucessões convergentes.

d) Estude a função f quanto a diferenciabilidade, calcule as funções derivadas parciais e calcule ainda $f'_{(1,-1,e)}(0,0,1)$.

(Grupo I da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

7.25 Seja $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ um vector unitário de $\mathbb{R}^n$ e $F(\boldsymbol{x})=e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}$ para todo o $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e calcule as (primeiras) derivadas parciais de F no ponto $\mathbf{0}=(0,0,\dots,0)$.

b) Justifique que a derivada $F'(\mathbf{0})$ é a aplicação $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que $\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$, para todo o $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

c) Quanto vale o limite $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}\frac{e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}-1-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$? Porquê?

d) Verifique que $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}=F$.

(Grupo II duma Prova de Análise II)

Resolução:

a) F é uma função composta de duas funções diferenciáveis, logo é diferenciável: $F=f\circ\varphi$ com $\boldsymbol{x}\mapsto\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ e $u\mapsto f(u)=e^u$. Como $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)=\frac{df}{du}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}a_i \qquad \text{para } i=1,\dots,n.$$

No ponto $\mathbf{0}$ vem: $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{0})=a_i$.

b) Sendo $\boldsymbol{h}=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ a a derivada de F em $\mathbf{0}$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$DF(\mathbf{0})\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{0}) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{0})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{h}.$$

c) Como F é diferenciável em $\mathbf{0}$, da definição de diferenciabilidade vem

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{F(\boldsymbol{x}) - F(\mathbf{0}) - DF(\mathbf{0})\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \frac{e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}} - 1 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0.$$

d) Como, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\, a_i\right) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\, a_i^2$$

obtemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}\,\|\boldsymbol{a}\|^2 = e^{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}).$$

7.26 Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos racionais. Uma aplicação f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ x^2 + y^2, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}, \\ -(x^2+y^2), & \text{se } x \neq 0 \text{ e } \frac{y}{x} \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

a) Esta função é diferenciável na origem? Justifique.

b) Indique o conjunto dos pontos onde f é diferenciável.

c) Dado um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ indique quais são os vectores $\boldsymbol{h} \neq (0,0)$ para os quais existe $f'_{\boldsymbol{h}}(a,b)$.

(Prova de Análise Matemática III de 1978)

7.27 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{se } x + y > 0, \\ x + y, & \text{se } x + y \leq 0, \end{cases}$$

a) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

b) Determine, caso existam, as derivadas segundo o vector $(1,1)$ nos pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$.

(Prova de Análise Matemática III de 20/3/82)

7.28 Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão:

$$g(x,y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } xy > 0, \\ 0, & \text{se } xy \leq 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

b) Calcule $g'_{(1,1)}(0,0)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g no ponto $(0,0)$?

(Grupo II1 da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

Resolução:

a) Não podemos usar as regras de derivação usuais para calcular as derivadas parciais na origem mas, notando que a função é identicamente nula sobre os eixos coordenados, concluímos, usando a definição de derivada parcial, que as derivadas parciais de g são nulas em $(0,0)$.

b) Por definição,

$$g'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{g(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}) - g(\boldsymbol{a})}{t},$$

logo

$$g'_{(1,1)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g((0,0)+t(1,1)) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t} = 2.$$

Pode concluir-se que g não é diferenciável em $(0,0)$ pois, se o fosse, ter-se-ia:

$$g'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \nabla g(0,0)\cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)v_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)v_2$$

para qualquer $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Ora $g'_{(1,1)}(0,0) = 2$ mas $\nabla g(0,0) = 0$.

7.29 Considere a função de $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^k\, y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Estude f quanto à sua diferenciabilidade em $(0,0)$ em função do parametro k.

(Prova de Análise Matemática III de 14/3/81)

7.30 Seja φ uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que:

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \qquad \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

1. Prove que, em qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, se verifica a igualdade

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(b,a).$$

2. Calcule $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(c,c)$ com $c \in \mathbb{R}$ e $v = (1,-1)$.

(Grupo IIIa do 2º Teste de 30/7/79)

7.31 Considere a função $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

1. Determine o seu domínio, D, e mostre que f é diferenciável em todos os pontos de D.
2. Calcule $f'_x(x,y)$ e $f'_y(x,y)$.
3. Determine $f'_{(h,h)}(1,1)$ com $h \neq 0$.
4. Mostre que f não é prolongável por continuidade a nenhum ponto da fronteira de D.

(Grupo IIa do Exame de 2ª época de 11/2/80)

7.32 Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.

b) Verifique se f é ou não diferenciável no ponto $(0,0)$.

c) Indique, justificando, qual o domínio de diferenciabilidade de f.

d) Verifique se existe derivada de f segundo o vector $(1,1)$ nos seguintes pontos: $(0,0)$ e $(3,5)$. No caso de existir alguma delas indique o seu valor.

(Grupo II da Prova de 17/10/77)

7.33 Considere as funções f, g, u, v : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x,y) = \sqrt{x} + \log(\cos y)$, $g(x,y) = \sqrt{\operatorname{sen} x} + \log(y^2 - 1)$, $u(x,y) = \log(y/x) + \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2)$, $v(x,y) = \log(x^2 - y^2)$.

a) Determine o domínio de cada uma destas funções. Indique o interior, fronteira, exterior de cada um daqueles conjuntos e classifique-os quanto a serem abertos ou fechados.

b) Estude cada uma das funções quanto a diferenciabilidade.

c) Calcule, caso existam:

$$D_{(h_1,h_2)}f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \qquad D_{(2,-1)}g\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$
$$D_{(1,1/2)}u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad D_{(1,3)}v(1,0).$$

(Provas de Análise Matemática III de 17/12/80, 5/1/81, 27/2/81 e 7/81)

7.34 Sendo n um número natural maior do que 2, considere a função φ, definida em $\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ pela fórmula:

$$\varphi(x) = \|x\|^{2-n} \qquad \left(\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right).$$

a) Justifique que φ é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

b) Calcule as primeiras derivadas parciais de φ no ponto $(1,0,\ldots,0)$ e a derivada de φ no mesmo ponto segundo o vector $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

c) Verifique que, em qualquer ponto do domínio de φ,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = 0.$$

(Grupo II do 2º Teste de 11/9/79)

Resolução:

a) As derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = (2-n)\|x\|^{1-n}\|x\|^{-1}x_j = (2-n)\|x\|^{-n}x_j$ existem e são contínuas em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, logo φ é aí diferenciável.

b)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(1,0,\ldots,0) = (2-n)\delta_j^1, \qquad \text{onde } \delta_j^1 = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 1, \\ 0, & \text{se } j \neq 1. \end{cases}$$

$$\varphi'_v(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) v_j = (2-n)\|x\|^{-n} \sum_{j=1}^{n} x_j v_j.$$

Logo $\varphi'_v(1,0,\ldots,0) = (2-n)v_1$.

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left((2-n)\|\boldsymbol{x}\|^{-n}x_j\right) \\
&= (2-n)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\|x\|^{-n}\right)x_j + \|\boldsymbol{x}\|^{-n}\right] \\
&= (2-n)\left(-n\|\boldsymbol{x}\|^{-n-1}\|x\|^{-1}x_jx_j + \|\boldsymbol{x}\|^{-n}\right) \\
&= (2-n)\|\boldsymbol{x}\|^{-n}\left(-n\|\boldsymbol{x}\|^{-2}x_j^2 + 1\right).
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= (2-n)\|\boldsymbol{x}\|^{-n}\left(-n\|\boldsymbol{x}\|^{-2}\sum_{j=1}^{n}x_j^2 + n\right) \\
&= (2-n)\|\boldsymbol{x}\|^{-n}(-n+n) = 0.
\end{aligned}$$

7.35 Seja F a função definida por $F(x,y) = \int_y^{x^2y}\frac{dt}{\log t}$.

a) Determine o domínio de F e diga, justificando, se ele é aberto, fechado, compacto ou conexo.

b) Justifique que F é diferenciável em todo o seu domínio e calcule as funções derivadas parciais.

(Grupo IV do Exame Final de 9/10/78)

7.36 Considere a função

$$g(x,y) = \int_{y+2}^{xy^2-x}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$.

1. Represente geometricamente o seu domínio D. Determine o seu interior e a sua fronteira e indique, justificando, se D é aberto, fechado, limitado, conexo.

2. Indique, justificando, o domínio de diferenciabilidade de g e calcule as suas derivadas parciais.

(Grupo IIIa do Exame de 2ª época de 11/2/80)

7.37 Seja G uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e sejam a e b números reais, com $a < b$.

a) Mostre que, se $G(a,a) = G(b,b)$, então existe $c \in\,]a,b[$ tal que $G'_{(h,h)}(c,c) = 0$, qualquer que seja $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. [**Sugestão**: Na resolução desta alínea poderá ser-lhe útil aplicar o *Teorema de Rolle*].

b) Mostre por meio de um exemplo que a proposição enunciada na alínea (a) seria falsa se se omitisse a hipótese de diferenciabilidade de G.

(Grupo IV da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

7.38 Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x,y) = \left(\frac{x\,y}{1-x^2-y^2}, \frac{\sqrt{y^2-x}}{x} \right)$$

a) Determine o domínio de diferenciabilidade de F. Justifique.

b) Calcule a derivada dirigida $D_{(1,1)}F(1,2)$. Justifique o seu processo de cálculo.

7.39 Considere as funções definidas em $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$ por:

$$f_p(x,y) = y^{p-1}D(x), \quad p \in \{1,2,3\},$$

em que

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Estude quanto a continuidade f_1, f_2, f_3.

b) Calcule as derivadas parciais de f_3 e indique o seu domínio.

c) Mostre que $\frac{\partial f_3}{\partial y}$ é contínua na origem e existe em $\mathbb{R}^2$.

d) Usando o resultado anterior e a existência de $\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0)$ mostre que f_3 é diferenciável em $(0,0)$.

e) Considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por: $g(x,y,z) = f_3(x,y)D(z)$. Pode usar o resultado utilizado em (d) para provar que g é diferenciável em $(0,0,0)$?

f) Prove que g é diferenciável em $(0,0)$.

7.40 Seja f uma função real definida em $\mathbb{R}^2$ por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua em todo o seu domínio.

b) Estude f quanto a diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.

c) Indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde existem e são iguais as derivadas parciais de segunda ordem f''_{xy} e f''_{yx}. Justifique.

(Prova de Análise Matemática III de 27/2/81)

7.41 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

calcule, quando existirem, as derivadas parciais $D_{1,2}f(0,0)$ e $D_{2,1}f(0,0)$. Depois de efectuados os cálculos conclua justificadamente sobre a continuidade de $D_{1,2}f$ em $(0,0)$.

(Prova de Análise Matemática III)

Resolução: Começamos por calcular $D_1 f(x,y)$ e $D_2 f(x,y)$. Se $(x,y) \neq (0,0)$ tem-se:

$$D_1 f(x,y) = y \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$D_2 f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\frac{-2y\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2-y^2\right)2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

No ponto $(0,0)$:

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0$$
$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h \frac{-h^2}{h^2} = -1$$

Daqui sai:

$$D_{1,2} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-(-1)}{h} = \infty,$$
$$D_{2,1} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(D_1 f\right)(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

É evidente que $D_{1,2} f$ não é contínua em $(0,0)$. Pode observar-se que também não é contínua na origem a derivada $D_{2,1} f$; com efeito, existindo $D_1 f(x,y)$, $D_2 f(x,y)$ e $D_{2,1} f(x,y)$ em todos os pontos de uma vizinhança da origem, se $D_{2,1} f$ fosse contínua em $(0,0)$ deveria ter-se $D_{1,2} f(0,0) = D_{2,1} f(0,0)$.

7.42 Seja $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear, i.e., para todos os $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i \in \mathbb{R}^p$, $(i = 1,2)$:

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1) = \alpha_1 T(x_1, y_1) + \alpha_2 T(x_2, y_1)$$
$$T(x_1, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T(x_1, y_1) + \alpha_2 T(x_1, y_2).$$

a) Mostre que existe $M > 0$ tal que:

$$\|T(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\| \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}^n}\ \forall_{y\in\mathbb{R}^m}.$$

b) Considerando no espaço produto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ uma norma definida por $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ mostre que T é diferenciável.

(Prova de Análise Matemática III de 27/11/82)

7.4 Teorema da derivação da função composta

7.43

a) Sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função cujas funções coordenadas g_1 e g_2 são definidas pelo sistema:

$$g_1(x,y) = x\cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha$$
$$g_2(x,y) = x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$$

onde α é uma constante real, determine a matriz jacobiana de g num ponto arbitrário de $\mathbb{R}^2$ e calcule a derivada direccional da função na direcção e sentido do vector $\boldsymbol{h} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

b) Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que:

$$\begin{aligned} f(u,0) &= 0 \qquad \forall_{u\in\mathbb{R}} \\ f(0,v) &= v \qquad \forall_{v\in\mathbb{R}} \end{aligned}$$

calcule $f'_{\boldsymbol{h}}(0,0)$, onde $\boldsymbol{h}$ é o vector referido em a). Justifique a resposta.

c) Sendo $\varphi = f \circ g$, calcule:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)\right]^2$$

(Grupo III duma Prova de Análise II)

Resolução:

a) A derivada de g é [1]

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Como g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ temos:

$$\begin{aligned} g'_{\boldsymbol{h}}(x,y) = Dg(x,y)\boldsymbol{h} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \cos\alpha\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\theta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Começamos por calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$; como f é diferenciável virá então: $f'_{\boldsymbol{h}}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\boldsymbol{h}$. Ora

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1, \end{aligned}$$

e

$$f'_{\boldsymbol{h}}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta.$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(0,0))\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(0,0))\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0) \\ &= 0\cos\alpha + 1\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(0,0))\frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(0,0))\frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0) = \cos\alpha. \end{aligned}$$

Temos portanto:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)\right)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

7.44 a) Determine a matriz jacobiana, no ponto $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujas funções coordenadas são definidas pelo sistema:

$$\begin{aligned} g_1(u, v, w) &= e^u \cos v \cos w, \\ g_2(u, v, w) &= e^u \cos v \operatorname{sen} w, \\ g_3(u, v, w) &= e^u \operatorname{sen} v. \end{aligned}$$

b) Se for

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

a matriz jacobiana de uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ no ponto $(1, 0, 0)$, (onde f se supõe diferenciável), qual será a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(0, 0, 0)$? Porquê?

(Grupo Ib do 2º Teste 11/9/79)

7.45 Seja φ uma aplicação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$; sejam L_1 e L_2 as funções coordenadas da sua derivada no ponto $(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} L_1(x, y, z) &= 2x + 3y + z \\ L_2(x, y, z) &= x - y + z \end{aligned}$$

Seja ψ a seguinte aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$:

$$\psi(u, v) = \operatorname{arctg}(u^2 + v).$$

Sabendo que $\varphi(0, 0, 0) = (1, 2)$, calcule $(\psi \circ \varphi)'(0, 0, 0)$.

(Grupo II2 da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

7.46 Sejam ρ e μ aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definidas por:

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2, x_3) &= (x_2, x_3, x_1), \\ \mu(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2 \cos x_3, x_2 \operatorname{sen} x_3). \end{aligned}$$

e define-se $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por:

$$\psi = \mu \circ \rho \circ \mu.$$

a) Justificando a diferenciabilidade de ρ e μ em $\mathbb{R}^3$, determine as derivadas e os determinantes das matrizes jacobianas que as representam num ponto (x_1, x_2, x_3).

b) Justificando a diferenciabilidade de ψ determine (sem obter explicitamente uma expressão para ψ) o determinante da matriz jacobiana de ψ num ponto (x_1, x_2, x_3).

7.47 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função que transforma cada vector (x, y) no vector (u, v) tal que:

$$\begin{aligned} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

1. Verifique que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

[1] Nesta e noutras soluções identificamos a aplicação linear derivada com a matriz que a representa.

2. Sendo $g = f \circ f$, mostre que a aplicação linear $g'(0,0)$ é uma homotetia, isto é, da forma $g'(0,0)\, w = \alpha\, w$ para cada $w \in \mathbb{R}^2$ e com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Grupo IIb do 2º Teste de 30/7/79)

Resolução:

1. A conclusão segue dos cálculos seguintes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \operatorname{sen} y,\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \operatorname{sen} y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^x \cos y, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^x \cos y,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= e^x \operatorname{sen} y, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -e^x \operatorname{sen} y.
\end{aligned}$$

2. Designando por I a matriz identidade

$$\begin{aligned}
g'(0,0) &= f'(f(0,0))f'(0,0) = f'(1,0)f'(0,0)\\
&= \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}_{(1,0)} \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}_{(0,0)}\\
&= eI^2 = eI.
\end{aligned}$$

Tem-se portanto $g'(0,0)\boldsymbol{w} = e\boldsymbol{w}$, para qualquer $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$.

7.48 Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ duas funções diferenciáveis e seja $F = f \circ \varphi$. Designando por φ_1, φ_2 e φ_3 as funções coordenadas de φ, mostre que, se forem verificadas as igualdades:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial v}(u_0, v_0), \qquad i = 1, 2, 3,$$

sê-lo-á também a igualdade $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0)$.

(Grupo IIIb do Exame Final de 18/9/74)

7.49 Sejam $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ duas funções diferenciáveis e $G = g \circ h$. Sendo $z_0 \in \mathbb{R}$, designe-se por L_1 e L_2 as funções coordenadas da aplicação linear $g'[h(z_0)]$. Mostre que, se $L_1(x, y) = L_2(x, y), \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$, então

$$\frac{\partial G_1}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial G_2}{\partial z}(z_0),$$

onde G_1 e G_2 são as funções coordenadas da função G.

(Grupo IIIb do Exame Final de 25/9/79)

7.50 Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}^2$ pelas expressões:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2), \qquad g(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2}$$

e seja φ a função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida pela igualdade:

$$\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)).$$

a) Estude as funções f e g quanto a continuidade e diferenciabilidade.

b) Calcule as funções derivadas parciais de f e g, indicando os respectivos domínios.

c) Sendo (h,k) um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$, diga se existem, e calcule em caso afirmativo, $f'_{(h,k)}(0,0)$ e $g'_{(h,k)}(0,0)$.

d) Estude φ quanto a continuidade e diferenciabilidade, e calcule a sua derivada em todos os pontos do seu domínio de diferenciabilidade.

e) Calcule $(f\circ\varphi)'(1,0)$.

(Grupo III do Exame Final de 9/10/78)

7.51 Considere as aplicações $f:\ \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ assim definidas:

$$f(x,y)=\frac{x^3y}{x^2+y^2},\qquad g(t)=e^t.$$

a) Estude f e g quanto a continuidade. Verifique que f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

b) Designando por F o prolongamento por continuidade de f, calcule $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(0,0)$ e $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(0,0)$.

c) Verifique que F é diferenciável em todo o seu domínio.

d) Sendo $\boldsymbol{h}$ um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$ indique, justificando, o valor de $F'_{\boldsymbol{h}}(0,0)$.

e) Estude a função $\varphi=g\circ F$ quanto a continuidade e diferenciabilidade.

f) Calcule $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)(0,0)$ e $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)(0,0)$.

g) Sendo ψ a aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida por $\psi(x,y)=(\varphi(x,y),e^{x^2+y^2})$ calcule a derivada de ψ no ponto $(0,0)$.

(Grupo II do 2º Teste de 15/9/78)

7.52 Seja g a função definida por $g(x,y)=\sqrt{x^2y}$.

a) Determine o domínio D de g. Determine o exterior, o interior, a fronteira e o derivado de D. Será D aberto? E fechado?

b) Seja

$$G(x,y)=\begin{cases} g(x,y), & \text{se } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{se } (x,y)\notin D,\end{cases}$$

Estude G quanto a continuidade.

c) Calcule $\frac{\partial G}{\partial x}$ e $\frac{\partial G}{\partial y}$, indicando os respectivos domínios.

d) Mostre que G é diferenciável no ponto $(0,0)$.

e) Sendo $\boldsymbol{h}$ um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$, indique, justificando, o valor de $G'_{\boldsymbol{h}}(0,0)$.

f) Seja $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ a função assim definida:

$$\psi(t)=(t+1,2t+2).$$

Calcule $\left(\frac{d(G\circ\psi)}{dt}\right)_{t=0}$ e $\left(\frac{d(G\circ\psi)}{dt}\right)_{t=-1}$.

7.53 Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}^2$ pelas expressões:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(x,y) = e^{x^2y}.$$

a) Estude f e g quanto a continuidade.

b) Calcule as derivadas parciais de f e g.

c) Estude f e g quanto a diferenciabilidade.

d) Sendo $\psi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ estude ψ quanto a continuidade e diferenciabilidade; calcule na origem a derivada segundo um vector $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ não nulo.

e) Calcule a derivada de $g \circ \psi$ na origem.

(Grupo II do Exame de 23/2/79)

7.54 Considere a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{(x^2+y^2)-1}, & \text{para } \|(x,y)\| > 1, \\ \frac{\pi}{2}(x^2+y^2), & \text{para } \|(x,y)\| \leq 1. \end{cases}$$

a) Estude f quanto a continuidade.

b) Sendo (a,b) tal que $\|(a,b)\| = 1$, mostre que não existe $f'_{(a,b)}(a,b)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de f nos pontos da circunferência de equação $\|(x,y)\| = 1$? Justifique.

c) Mostre que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ com norma diferente de 1.

d) Determine $f'_x(0,1)$.

e) Indique, justificando, qual o contradomínio de f.

f) Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por
$$x \mapsto (e^x, \operatorname{arctg} x)$$
mostre que $g \circ f$ é diferenciável no ponto $(1/2, 1/2)$ e determine a derivada nesse ponto. Aproveite o resultado para calcular $(g \circ f)'_{(0,1)}(1/2, 1/2)$.

(Grupo II do Exame de 2ª época de 4/2/80)

7.55 Seja φ uma função real diferenciável definida em $\mathbb{R}^3$ e $\psi(x,y,z) = \varphi(x-y, y-z, z-x)$. Mostre que, em qualquer ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se verifica a igualdade:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

(Grupo Ia do 2º Teste de 11/9/79)

7.56 Dada a função f de $\mathbb{R}^3$ com valores em $\mathbb{R}$ definida por $z = f(x,u,v)$, diferenciável no seu domínio, considere a função $F(x,y) = f(x, x+y, xy)$.

a) Exprima $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$ nas derivadas parciais de f.

b) Aproveite este resultado para verificar a igualdade

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(2,1)} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(2,1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(2,3,2)} - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{(2,3,2)}$$

(Prova de Análise Matemática III de 5/2/79)

7.57 Sabendo que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no ponto $(0, e, 0)$ e que a sua matriz jacobiana nesse ponto é $\begin{bmatrix} e & -1 & e \end{bmatrix}$, mostre que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(0,1)} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(0,1)} = 0,$$

onde $g(x, y) = f((\operatorname{sen}(xy^2), e^y, \log(1 + x^2)), \forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$.

(Grupo IIb do Exame de 2ª Época de 11/2/80)

7.58 Seja F uma função que admite derivada contínua em $\mathbb{R}$ e $z = xy + xF(y/x)$. Mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z, \qquad \forall_{x\neq 0}.$$

(Grupo IIIa do Exame de 23/2/79)

7.59 Sendo G uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e

$$F(x, y, z) = G(x^2 - y^2, y^2 - z^2), \quad \forall_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3}.$$

1. Indique, justificando, os pontos em que F é diferenciável.

2. Mostre que, em qualquer ponto (x, y, z), se verifica a igualdade

$$yzF'_x(x, y, z) + xzF'_y(x, y, z) + xyF'_z(x, y, z) = 0.$$

(Grupo IIa do 2º Teste de 30/7/79)

7.60 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Considere a função G definida por $G(u, v) = f(u^2 + v^2, u/v)$. Mostre que, para todo o $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v \neq 0$, existe a derivada dirigida $G'_{(u,v)}(u, v)$, tendo-se:

$$G'_{(u,v)}(u, v) = 2(u^2 + v^2)D_1 f(u^2 + v^2, u/v).$$

(Prova de Análise Matemática III de 12/12/81)

7.61 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Seja G uma função definida por $G(x, y, z) = F[(x - y)z, (z - x)y]$.

a) Será G diferenciável em $\mathbb{R}^3$? Justifique a sua resposta e na afirmativa calcule $G'(1, 1, 1)$ em termos das derivadas parciais de F.

b) Determine em que condições a derivada dirigida de G segundo o vector $(1,1,1)$ é identicamente nula sobre a recta $x = -y = -z$.

(Prova de Análise Matemática III de 17/12/80)

7.62 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que $f(-1,1) = -1$. Considere uma função G definida por

$$G(x,y) = f[f(x,y), f^2(x,y)].$$

Mostre que

$$\frac{\partial G}{\partial x}(-1,1) + 2\frac{\partial G}{\partial y}(-1,1) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\right]^2 - 4\left[\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right]^2.$$

(Prova de Análise Matemática III de 5/1/81)

7.63 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e tal que: $F(0,1) = 0, F(1,0) = 1$. Seja $H(x,y) = F(F(x,y), F(y,x))$. Calcule $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{(0,1)}$ em função de derivadas parciais de F.

(Prova de Análise Matemática III de 7/81)

7.64 Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Defina-se uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ através de

$$F(x,y,z) = g(g(x,y), g(y,z)).$$

a) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de F em função de derivadas parciais de g. Justifique ser $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

b) Suponha que para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ temos $D_{(1,1)}g(x,y) = 0$. Mostre que então

$$D_{(1,1,1)}F(x,y,z) = 0$$

para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

7.65 Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$; seja $u(x,t) = af(x+ct) + bf(x-ct)$ sendo a, b, c constantes reais e $c \neq 0$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

(Grupo I2 da Prova de 15/9/78)

7.66 Sejam F e g duas funções de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e $u(x,y) = F[x + g(y)]$. Verifique que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Grupo III1 da Prova de 17/10/77)

Resolução: Do *teorema de derivação da função composta* obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= F'(x+g(y))1 = F'(x+g(y)),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= F'(x+g(y))g'(y),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(F'(x+g(y))\right) = F''(x+g(y))g'(y),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F''(x+g(y)).
\end{aligned}$$

donde segue o resultado.

7.67 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x, y) = xf(y/x) + g(y/x)$$

sempre que $x \neq 0$. Mostre que $\forall_{(x,y) \neq (0,y)}$ temos:

$$x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

(Prova de Análise Matemática III de 24/11/79)

7.68 Seja $u(x, y) = F(x^2 - y^2, y^2)$. Sabendo que as derivadas cruzadas de segunda ordem da função F são nulas, mostre que:

$$\frac{x}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \forall_{x,y \neq 0}.$$

(Na resolução deste exercício admita que pode utilizar o teorema da derivada da função composta sempre que dele necessitar).

(Grupo III da Repetição do 2º Teste de 22/9/78)

7.69 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $D_1F(x, y) D_2F(x, y) \neq 0$, $\forall_{(x,y) \in \mathbb{R}^2}$. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ outra função tal que:

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$;

ii) em $\mathbb{R}^2$ tem-se $F(u'_x, u'_y) = k$ com k uma constante real.

Mostre que, nestas condições, é válida a igualdade:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

(Prova de Análise Matemática III de 24/11/79)

7.5 Teoremas do valor médio e de Taylor

7.70 Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = \cos x \operatorname{sen} y$ e os pontos $(0, 0)$ e $(\pi/6, \pi/6)$. Mostre que existe $\theta \in \left]0, 1\right[$ tal que

$$\cos\left(\frac{\theta \pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

(Prova de Análise Matemática III de 9/2/81)

7.71 Considere uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, satisfazendo, para todo o $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, as condições seguintes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = xu(t, x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = tu(t, x).$$

Prove que existe, para cada $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, um real $\theta \in \left]0, 1\right[$ que verifica: