7.87 Volte a considerar o exercício 7.64. Suponha adicionalmente que $g(0,0) = 0$.

a) Indique condições suficientes relativas a g que garantam a definição duma função implícita $(x,z) \mapsto y = \varphi(x,z)$ numa vizinhança da origem através de $F(x,y,z) = 0$ com $\varphi(0,0) = 0$.

b) Justifique que naquelas condições φ é diferenciável em $(0,0)$ e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = -\frac{D_1 g(0,0)}{2D_2 g(0,0)}.$$

7.7 Estudo de extremos

7.88 Determine os extremos relativos da função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = xye^{x-y}.$$

(Prova de Análise Matemática III de 3/7/79)

7.89 a) Determine os extremos relativos da função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

b) O que pode afirmar sobre os extremos absolutos daquela função?

(Prova de Análise Matemática III de 29/1/79)

Resolução:

a) Tratando-se de uma função diferenciável os únicos candidatos a pontos de extremo são pontos onde o gradiente se anula. Ora $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (3x^2 - 3y, -3x + 3y^2)$ logo consideramos o sistema de estacionaridade $\nabla f(x,y) = (0,0)$ que toma a forma:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Portanto os candidatos a pontos de extremo são $(0,0)$ e $(1,1)$. Estudemos o sinal da forma quadrática definida por:

$$(h_1, h_2) = \boldsymbol{h} \mapsto D^2_{\boldsymbol{h}} f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)h_2^2$$

em $(0,0)$ e $(1,1)$. Temos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$.

A forma quadrática reduz-se a $(h_1, h_2) \mapsto -6h_1h_2$ em $(0,0)$ que reconhece-se imediatamente como uma forma quadrática indefinida e portanto $(0,0)$ não é um ponto de extremo.

Em $(1,1)$ a forma quadrática[2] reduz-se a $(h_1, h_2) \mapsto 6h_1^2 - 6h_1h_2 + 6h_2^2 = 6\left((h_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}h_2)^2 + \frac{h_2^2}{2}\right)$ que se reconhece como definida positiva e portanto $(1,1)$ é um ponto de mínimo relativo.

b) Como $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ reconhecemos imediatamente que esta função não possui extremos absolutos.

[2] A classificação de formas quadráticas em $\mathbb{R}^2$ pode ser feita por diversos processos equivalentes. No texto desta solução optou-se por “completar o quadrado” o que não pressupôs conhecimentos especiais de Álgebra Linear. Alternativas equivalentes são, por exemplo, a determinação do sinal dos valores próprios da matriz hessiana, etc.

7.90 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$. Determine os extremos locais de f, indicando se são ou não extremos absolutos.

(Prova de Análise Matemática III de 27/4/81)

7.91 Idem, para $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

(Prova de Análise Matemática III de 14/3/81)

7.92 Considere uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, satisfazendo para todo o $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, as condições seguintes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = xu(x,t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = tu(x,t)$$

e $u(0, 0) = 1$. Mostre que u não admite um extremo local na origem.

(Prova de Análise Matemática III de 3/2/81)

Resolução: Vamos tentar usar um critério baseado na fórmula de Taylor para provar que uma tal função, se existir, não pode ter um extremo na origem. Uma condição necessária para existência de um extremo na origem é o gradiente da função em $(0, 0)$ ser $\mathbf{0}$. Ora

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,0) = 0\, u(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0\, u(0,0) = 0$$

pelo que aquele critério é inconclusivo. Consideramos então derivadas parciais de segunda ordem de u que se podem obter por derivação de ambos os membros das igualdades no enunciado.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\,\frac{\partial u}{\partial x} = t^2\, u(x,t),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\,(tu(x,t)) = u(x,t) + t\,\frac{\partial u}{\partial t} = u(x,t) + xt\, u(x,t),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\,\frac{\partial u}{\partial x} = x^2\, u(x,t).$$

pelo que particularizando em $(0, 0)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,0) = 0.$$

A matriz hessiana de u em $(0, 0)$ é então

$$Hu(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

que define uma forma quadrática indefinida $(h, k) \mapsto 2hk$ pelo que $(0, 0)$ não é um ponto de extremo.

Resolução alternativa:
Sabendo que o gradiente de uma função é ortogonal às suas linhas de nível vamos tentar identificar as linhas de nível de u. Isto permitirá identificar u e resolver a questão posta.
Como

$$\nabla u(x,t) = u(x,t)(t,x)$$

e como qualquer função do produto xt, digamos $v(x,t) = f(xt)$, satisfaz $\nabla v(x,t) = f'(xt)(t,x)$ procuramos um tal f que deverá então satisfazer $f' = f$ e $f(0) = 1$. Sabemos que uma tal função é a exponencial e com efeito se considerarmos $u(x,t) = e^{xt}$ esta função satisfaz todas as condições do enunciado.
Poderiam no entanto existir outras funções satisfazendo as condições do enunciado. Se v fosse uma tal função facilmente verificamos que o gradiente de $e^{-xt}v(x,t)$ é $\mathbf{0}$ e portanto o produto $e^{-xt}v(x,t)$ é constante, constante essa que só poderá ser 1 devido ao valor em $(0,0)$ imposto.
Decorre então da identificação de u a não existência de extremo na origem, visto que a função $(x,t) \mapsto tx$ o não tem e que a função exponencial é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

7.93 Para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ considere a função definida por $f(x,y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + xy$. Determine os seus pontos de estacionaridade consoante seja: 1) $ab > 0$; 2) $ab < 0$; 3) $ab = 0$ com $a^2 + b^2 \neq 0$; 4) $a^2 + b^2 = 0$. Em cada caso determine os extremos da função.

(Prova de Análise Matemática III de 23/7/80)

Resolução: Consideremos em primeiro lugar os casos 1) e 2). Os pontos de estacionaridade são os pontos (x,y) tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{a}{x^2} + y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{b}{y^2} + x = 0, \end{cases} \qquad \text{ou seja, tais que } x = a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}},\ y = b^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{3}}$$

(com $a \neq 0$ e $b \neq 0$).
Estudemos a natureza da forma quadrática

$$(h,k) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\, h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\, h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\, k^2$$

com $(x_0,y_0) = (a^{2/3}b^{-1/3}, a^{-1/3}b^{2/3})$. As derivadas parciais de segunda ordem de f em (x_0,y_0) tomam os valores:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 2b/a, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = 2a/b.$$

pelo que a matriz hessiana de f em (x_0,y_0) é:

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 2b/a & 1 \\ 1 & 2a/b \end{bmatrix}.$$

Como o determinante desta matriz é 3 o ponto (x_0,y_0) será sempre um ponto de extremo. A classificação do extremo dependerá do sinal de $2b/a$ que é igual ao sinal de ab; ou seja, se $ab > 0$ trata-se de um ponto de mínimo e se $ab < 0$ trata-se de um ponto de máximo.
No caso 3) tem-se $a = 0$ e $b \neq 0$ ou $a \neq 0$ e $b = 0$. Na primeira destas suituações os pontos de estacionaridade obtêm-se a partir de:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \equiv y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{b}{y^2} + x = 0 \end{cases} \qquad \text{um sistema impossível!}$$

e analogamente se $b = 0$. No caso 3) não há portanto pontos de estacionaridade.
No caso 4) tem-se $a = 0$ e $b = 0$ pelo que o sistema de estacionaridade reduz-se a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \equiv x = 0 \end{cases}$$

só tem uma solução que é $(0,0)$. A função $f(x,y)$ é nesse caso $f(x,y) = xy$ e $(0,0)$ é um ponto de sela.

7.94 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + (1 - \delta)x^2 y^2$$

em que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes reais. Mostre que não existem constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que, simultâneamente:

i) $(0, 0)$ seja um ponto mínimo de f;

ii) $(1, 1)$ seja um ponto de estacionaridade de f.

[**Sugestão**: Comece por mostrar que: (i) $\Longrightarrow \beta\gamma \geq 0$; (ii) $\Longrightarrow \beta + \gamma + 2 = 0$].

(Prova de Análise Matemática III de 19/2/83)

7.95 Considere a função definida por $f(x, y) = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + 1$.

a) Mostre que f possui um mínimo absoluto.

b) Mostre que o estudo baseado na fórmula de Taylor não permite classificar os pontos de estacionaridade.

(Prova de Análise Matemática III de 5/2/79)

7.96 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas nos seus domínios e defina-se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ através de $F = f \circ g$. Se φ for uma função real diferenciável num aberto de $\mathbb{R}^p$, designa-se neste exercício o conjunto dos pontos de estacionaridade de φ por $E(\varphi)$.

a) Mostre que se f tem um máximo (resp. mínimo) num ponto $\boldsymbol{y}$ do contradomínio de g, então F tem um máximo (mínimo) nos pontos de $g^{-1}(\{\boldsymbol{y}\})$.

b) Suponha adicionalmente que f e g são funções diferenciáveis. Mostre que então: $E(F) = E(g) \cup g^{-1}(E(f))$.

c) Suponha adicionalmente que $n = 2$ e que f e g são funções de classe C^2. Mostre que se $(x_0, y_0) \in g^{-1}(E(f))$ o critério de classificação dos pontos de estacionaridade baseado no estudo do termo de 2ª ordem da fórmula de Taylor é inconclusivo.

d) Classifique os pontos de estacionaridade da função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + 2(x^2 - y^2).$$

7.97 Estude a natureza dos pontos de estacionaridade da função definida por:

$$f(x, y) = (x - y)^3(3x - 3y - 4).$$

(Prova de Análise Matemática III de 20/2/79)

7.98 Idem, para $f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 4y$.

(Prova de Análise Matemática III de 13/7/79)

7.99 Sejam f e g funções reais de variável real e defina-se no produto cartesiano dos seus domínios uma função real φ através de $\varphi(x, y) = f(x) + g(y)$. Mostre que:

a) Se x_0 é um ponto de mínimo de f, y_0 um ponto de máximo de g e (x_0, y_0) um ponto de extremo de φ então ou f é constante numa vizinhança de x_0 ou g é constante numa vizinhança de y_0.

b) Se x_0 não é ponto de extremo de f então (x_0, y_0) não é ponto de extremo de φ, qualquer que seja y_0 no domínio de g.

c) Se x_0 é um ponto de mínimo de f e y_0 um ponto de mínimo de g então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo de φ.

7.100 Determine os extremos locais da função $f(x,y) = y^4 + x^2 - x^3$, indicando quais desses extremos são absolutos.

(Prova de Análise Matemática III de 8/3/79)

7.101 Determine o máximo (absoluto) da função definida no 1º quadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$) por $f(x,y) = x^2y^3(1-x-y)$.

(Prova de Análise Matemática III de 26/1/89)

7.102 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4.$$

a) Determine os extremos relativos de f.

b) Determine os extremos absolutos da restrição de f ao quadrado Q definido por:

$$Q = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}.$$

(Prova de Análise Matemática III de 27/2/81)

7.103 a) Determine as seis rectas constituídas por pontos de estacionaridade da função definida por $g(x,y,z) = xyz(x+y+z-1)$.

b) Mostre, sem recurso a derivadas de ordem superior à primeira, que a função não tem extremo em qualquer dos pontos daquelas rectas.

c) Diga se a função tem um máximo ou mínimo relativo nos restantes pontos de estacionaridade.

(Prova de Análise Matemática III de 12/7/80)

7.104 a) Entre os pontos que verificam a equação $x^2 + y^2 = 16$, determine pelo método dos multiplicadores de Lagrange, aquele que está mais próximo do ponto $A = (2,1)$ e determine a distância do ponto A àquela circunferência.

b) Confirme o valor da distância obtida, determinando-a por um processo elementar.

(Prova de Análise Matemática III de 29/1/79)

7.105 a) Determine os extremos e os extremos absolutos da restrição da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ ao conjunto $\{(x,y) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

b) Justifique o facto dos pontos obtidos serem efectivamente extremos absolutos.

(Prova de Análise Matemática III de 29/2/80)

7.106 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2x$.

a) Determine os extremos locais de f.

b) Que pode afirmar quanto à existência de extremos absolutos de f em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$?

(Prova de Análise Matemática III de 9/2/81)