Capítulo 5

Primitivação

5.1 Determine uma expressão geral de todas as primitivas das seguintes funções.

$$\text{a)} \quad (1-x)^5, \qquad \text{b)} \quad |x|.$$

(Grupo III2 da Prova de 25/7/77)

5.2 Para cada uma das funções definidas em $\mathbb{R}$ pelas expressões

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \frac{x}{1+x^4}, \qquad xe^{-x^2}$$

(todas elas imediatamente primitiváveis) obtenha, se possível:

a) A primitiva que se anula no ponto $x = 0$.

b) A primitiva que tende para 1 quando $x \to +\infty$.

Se nalgum caso for impossível obter uma primitiva que verifique a condição requerida explique a razão dessa impossibilidade.

(Pergunta 1 da Prova de 20/7/78)

Resolução:
Designando por F uma primitiva de $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ temos:

$$F(x) \equiv \int \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) 2\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + K.$$

a) Se $F(0) = 0$ é porque $K = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; a primitiva que se anula para $x = 0$ é pois:

$$F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

b) Para nenhum valor de K existe o limite $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ pelo que não existe nenhuma primitiva tal que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Designando por G uma primitiva de $\frac{x}{1+x^4}$ temos:

$$G(x) \equiv \int \frac{x}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + K.$$

a) Se $G(0) = 0$ é porque $K = 0$; a primitiva que se anula em 0 é pois:

$$G(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2}.$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2} + K = \frac{\pi}{4} + K.$$

Se $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ é porque $K = 1 - \frac{\pi}{4}$, logo a primitiva pedida é:

$$G(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Designando por H uma primitiva de xe^{-x^2}

$$H(x) \equiv \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + K.$$

a) Se $H(0) = 0$ é porque $K = \frac{1}{2}$. Logo, a primitiva pedida é:

$$H(x) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x^2}\right).$$

b) $\lim_{x\to+\infty} H(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + K\right) = K$. Logo a primitiva que verifica $\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$ é:

$$H(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + 1.$$

5.3 a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$x^2\cos(x^3+1), \qquad \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad e^x \operatorname{sen} x.$$

b) Determine a função F definida em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ que obedece às seguintes condições:

$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad F(2) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 10.$$

(Grupo I da Prova de 11/9/78)

5.4 Obtenha uma primitiva de cada uma das seguintes funções (todas elas elementarmente primitiváveis).

$$\operatorname{sen}(2x)\cos(2x), \qquad \frac{1}{x(2-3\log x)^{\frac{2}{3}}}, \qquad e^{x+e^x}.$$

(Grupo Ia da Repetição do 2º Teste de 18/9/80)

Resolução: Notando que a derivada de $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(2x)) = 2\cos(2x)$:

$$\int \operatorname{sen}(2x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\cos(2x)2\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x).$$

Notando que $\frac{1}{x}$ é a derivada de $\log x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(2-3\log x)^{\frac{2}{3}}}\,dx &= \int \frac{1}{(2-3\log x)^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{x}\,dx\\ &= -\frac{1}{3}\int (2-3\log x)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{x}\right)dx = -\frac{1}{3}3(2-3\log x)^{\frac{1}{3}}\\ &= -(2-3\log x)^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Finalmente

$$H(x) = \int e^{x+e^x}\,dx = \int e^x e^{e^x}\,dx = e^{e^x}.$$

5.5 Para cada umas das funções (todas elas imediatamente primitiváveis) definidas pelas expressões:

$$x\operatorname{sen} x^2, \qquad \frac{e^x}{2+e^x}, \qquad \frac{1}{(1+x^2)[1+(\operatorname{arctg} x)^2]}$$

determine, se possível:

1. Uma primitiva que se anule no ponto $x=0$;
2. Uma primitiva que tenda para 0 quando $x \to +\infty$.

Nos casos em que não seja possível obter uma primitiva nas condições requeridas explique sucintamente a razão dessa impossibilidade.

(Grupo Ib do 2º Teste de 28/7/80)

5.6 Determine uma primitiva de

$$\frac{\log x}{x(\log^2 x+1)}$$

no intervalo $]0,+\infty[$.

(Pergunta 1b da Prova de 7/74)

5.7 a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\operatorname{tg} x \sec^2 x; \qquad \operatorname{sen} x\ 2^{\cos x}; \qquad \frac{1}{x+x\log^2 x}.$$

b) Determine a função f, definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ que verifica as seguintes condições:

$$\begin{cases} f'(x) = 4x\log|x|,\\ f(-1)=1,\\ f(1)=-1.\end{cases}$$

(Grupo Ia e b do Exame de 2ª época de 11/2/80)

Resolução:

a) Designamos por $F(x)$ uma primitiva de $\operatorname{tg} x\sec^2 x$.

$$F(x) = \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x.$$

Designemos por $G(x)$ uma primitiva de $\operatorname{sen} x 2^{\cos x}$.

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \operatorname{sen} x 2^{\cos x}\, dx = \int 2^{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \frac{-1}{\log 2} \int e^{(\log 2)\cos x}(-\log 2 \operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{e^{(\log 2)\cos x}}{\log 2} = -\frac{2^{\cos x}}{\log 2}. \end{aligned}$$

Designemos por $H(x)$ uma primitiva de $\frac{1}{x+x\log^2 x}$

$$H(x) = \int \frac{1}{x + x\log^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1+\log^2 x} \frac{1}{x}\, dx.$$

Usando primitivação por substituição com $y = \log x$ e portanto $\frac{dy}{dx} = 1/x$ consideramos

$$\int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \operatorname{arctg} y$$

donde

$$H(x) = \operatorname{arctg}(\log x).$$

b) Trata-se de determinar em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma primitiva $J(x)$ de $4x \log |x|$ de forma que:

$$\begin{cases} f(-1) = 1, \\ f(1) = -1. \end{cases}$$

Se $x > 0$ devemos ter para alguma constante K_1:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int 4x \log x\, dx = 4 \int x \log x\, dx = 4\left(\frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x}\, dx\right) \\ &= 2x^2 \log x - 2\int x\, dx = 2x^2 \log x - x^2 + K_1 = x^2(2\log x - 1) + K_1 \end{aligned}$$

Se $x < 0$ devemos ter para alguma constante K_2:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int 4x \log(-x)\, dx = 4\left(\frac{1}{2}x^2 \log(-x) - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{-x}(-1)\, dx\right) \\ &= x^2(2\log(-x) - 1) + K_2. \end{aligned}$$

Assim $J(x)$ terá de ser da forma:

$$J(x) = \begin{cases} x^2(2\log x - 1) + K_1, & \text{se } x > 0, \\ x^2(2\log(-x) - 1) + K_2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Para obter $f(1) = -1$ e $f(-1) = 1$ as constantes K_1 e K_2 têm de escolher-se assim:

$$K_1 = 0, \qquad K_2 = 2.$$

5.8 Determine a função f, definida no intervalo $]0, +\infty[$ e que satisfaz as condições:

$$f'(x) = x^5 \log x - \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \quad \forall_{x>0} \qquad \text{e} \qquad f(1) = 0.$$

(Pergunta 1a da Prova de 18/12/72)

5.9 Estabeleça uma fórmula de recorrência para o cálculo de

$$P \operatorname{tg}^n x, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

(Pergunta 3 da Prova de 12/3/74)

Resolução: Ponha-se $J_n(x) = \int \operatorname{tg}^n x\,dx$. Se $n = 1$:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \\ &= -\int \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x)\,dx = -\log|\cos x| \end{aligned}$$

Se $n = 2$:

$$J_2(x) = \int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \operatorname{tg} x - x.$$

Se $n > 2$:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x\,dx - J_{n-2}(x) = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - J_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Temos pois:

$$\begin{aligned} &J_n(x) = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - J_{n-2}(x), \qquad \text{se } n > 2, \\ &J_1(x) = -\log|\cos x|, \\ &J_2(x) = \operatorname{tg} x - x. \end{aligned}$$

5.10 Primitive

$$x \log x + \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x \log x} + \frac{1}{x \log x \log(\log x)}.$$

(Pergunta 2 da Prova de 21/10/74)

5.11 Determine a função f que verifica:

$$\begin{cases} f''(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x, & \text{para todo o } x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = f'(0) = 1. \end{cases}$$

(Pergunta 3a da Prova de 19/7/71)

5.12 Determine a função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que verifica:

$$\begin{cases} f''(x) = \frac{1}{1+x}, & \text{qualquer que seja } x > -1, \\ f(0) = f'(0) = 1. \end{cases}$$

(Grupo IIa da Prova de 18/9/79)

5.13 Determine a função φ, definida em $\mathbb{R}$ e que verifica as condições seguintes:

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \frac{x+1}{x^2+1} & \text{qualquer que seja } x \in \mathbb{R}, \\ \varphi(0) = 1, \\ \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

(Pergunta 2b de uma Prova de Análise II)

5.14 Calcule

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx.$$

(Grupo Ia da Prova de 23/2/79)

Resolução: Escrevamos $\frac{x^4}{x^4-1}$ como soma de fracções simples:

$$\frac{x^4}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}.$$

Determinemos A, B, C e D:

$$1 = (Ax+B)(x^2-1) + C(x^2+1)(x+1) + D(x^2+1)(x-1)$$
$$1 = (A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 + (-A+C+D)x + (-B+C-D)$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B+C-D=0 \\ -A+C+D=0 \\ -B+C-D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0 \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{4} \\ D=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Quer dizer que:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx &= \int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| \\ &= x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|. \end{aligned}$$

5.15 Obtenha a primitiva da função

$$\frac{12x+8}{x^4-4x^2}$$

definida no intervalo $]2,+\infty[$ e que tende para 1 quando x tende para $+\infty$.

(Grupo Ib da Repetição do 2º Teste de 18/9/80)

5.16 Determine:

a) Uma expressão geral das primitivas da função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}.$$

b) A primitiva G, da função

$$g(x) = \frac{x+3}{x^4 - x^2}$$

definida no intervalo $]1, +\infty[$ e que verifica a condição $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3$.

(Grupo I da Prova de 28/6/79)

5.17 a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$f(x) = \cos(2x)\cos x, \qquad g(x) = \frac{\log \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h(x) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^4-1)^3}}.$$

b) Considere a função:

$$f(x) = \frac{3x^2+7}{(x^2+4)(x^2-1)}$$

definida em $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Obtenha uma primitiva F de f que satisfaça as três condições seguintes:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$,

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$,

iii) $F(0) = 1$.

(Grupo I da Prova de 11/9/79)

5.18 a) Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$e^{x^2+2\operatorname{sen} x}(x+\cos x), \qquad \frac{(1+2\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2}, \qquad x^2 \operatorname{sh} x.$$

b) Calcule:

$$\int \frac{4x^2-3x+5}{(x-1)^2(x+2)}\,dx.$$

(Grupo I da Prova de 22/9/78)

5.19 Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\frac{\operatorname{arcotg} x}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{3x+4}{(x-5)^2+3}.$$

(Pergunta 2a da Prova de 6/7/71)

5.20 Calcule

$$\int \frac{x^4}{x^4-5x^2+4}\,dx.$$

(Grupo II1a da Prova de 18/7/77)

5.21 Determine:

a) Uma função f, definida em $\mathbb{R}$, e verificando as condições:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \quad \forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

b) Decida justificadamente se existe uma função g, definida no intervalo $I =]16, +\infty[$ e tal que:

$$g'(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})} \quad \forall_{x\in I} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

(Pergunta 3 da Prova de 20/2/71)

5.22 Calcule uma primitiva de cada uma das funções

$$\frac{\log x}{\sqrt{1+x}} \qquad \text{e} \qquad \frac{5x-6}{x[(x-1)^2+2]}.$$

(Pergunta 2a da Prova de 5/7/71)

Resolução:

a) Primitivando por partes de $\frac{\log x}{\sqrt{1+x}}$ para $x > 0$:

$$I(x) = \int \frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int (1+x)^{-\frac{1}{2}} \log x\,dx = 2(1+x)^{\frac{1}{2}}\log x - 2\int (1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\,dx.$$

Para calcular $J(x) = \int (1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\,dx$ poderia parecer razoável tentar de novo uma primitivação por partes. No entanto tal conduz sempre a primitivas envolvendo potências fraccionárias de $1+x$ a multiplicar por uma potência inteira e não nula de x ou conduz-nos de novo à primitiva com que tínhamos começado.

Como as potências fraccionárias de $1+x$ são um problema tentamos uma mudança de variável para eliminá-las. Para tal consideramos a substituição $y = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, onde $x > 0$ e portanto $y > 1$, cuja inversa é $x = y^2 - 1$ que por sua vez tem derivada $\frac{dx}{dy} = 2y$, conduzindo ao cálculo de:

$$\int y\frac{1}{y^2-1}2y\,dy = 2\int \frac{y^2}{y^2-1}\,dy = 2\int (1+\frac{1}{y^2-1})\,dy = 2y + 2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy. \tag{5.1}$$

Decompondo $\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$ e determinando as constantes A e B através de $1 = A(y-1) + B(y+1)$ obtém-se $A = -\frac{1}{2}$ e $B = \frac{1}{2}$, quer dizer

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right),$$

pelo que

$$\int \frac{1}{y^2-1}dy = \frac{1}{2}\log\frac{y-1}{y+1} \qquad (\text{se } y > 1).$$

Substituindo em (5.1)

$$\int \frac{y^2}{y^2-1}\,dy = y + \frac{1}{2}\log\frac{y-1}{y+1}.$$

Daí que:

$$J(x) = 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + \log\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}+1}.$$

Voltando a $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= 2(1+x)^{\frac{1}{2}}\log x - 4(1+x)^{\frac{1}{2}} - 2\log\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}+1} \\ &= 2(1+x)^{\frac{1}{2}}(\log x - 2) - 2\log\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}+1}. \end{aligned}$$

Em conclusão:

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\left(\sqrt{1+x}(\log x - 2) - \log\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right) + K.$$

b) A primitiva $\int \frac{5x-6}{x[(x-1)^2+2]}\,dx$ calcula-se mais comodamente efectuando a mudança de variável $y = x - 1$ o que conduz a:

$$\int \frac{5y-1}{(y+1)(y^2+2)}\,dy.$$

Decompondo a fracção racional:

$$\frac{5y-1}{(y+1)(y^2+2)} = \frac{A}{y+1} + \frac{By+C}{y^2+2}$$

obtém-se calculando A, B e C,

$$\frac{5y-1}{(y+1)(y^2+2)} = \frac{-2}{y+1} + \frac{2y+3}{y^2+2}$$

e daí:

$$\begin{aligned}\int \frac{5y-1}{(y+1)(y^2+2)}\,dy &= -2\log|y+1| + \int \frac{2y+3}{y^2+2}\,dy\\ &= -2\log|y+1| + \int \frac{2y}{y^2+2}\,dy + 3\int \frac{1}{y^2+2}\,dy\\ &= -2\log|y+1| + \log(y^2+2) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dy\\ &= -2\log|y+1| + \log(y^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Invertendo a mudança de variável:

$$\int \frac{5x-6}{x[(x-1)^2+2]}\,dx = -2\log|x| + \log((x-1)^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}.$$

5.23 Calcule

$$\int \frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\,dx$$

(Grupo III da Prova de 19/9/77)

5.24 Determine as funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$ e que verificam as condições:

$$\begin{aligned}&f''(x) = (1+\operatorname{sen} x)\cos x, \quad f'(0) = 1, \quad f(0) = 3;\\ &g'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.\end{aligned}$$

(Pergunta 2a do Ponto nº 5 de 25/10/71)

5.25 Obtenha uma primitiva ϕ da função

$$\varphi(x) = \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}},$$

definida no intervalo $]0,+\infty[$ e tal que $\varphi(+\infty) = 1$. Seria possível obter uma primitiva Ψ de φ definida em $]-\infty,0[$ e com limite finito quando $x \to -\infty$? Justifique abreviadamente a resposta.

(Grupo IIc do Exame de 2/10/80)

Resolução: Vamos fazer a mudança de variável $y = e^x$ em $\int \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}\,dx$. Notando que $x = \log y$ e $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$ obtemos[1]

$$\int \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}\,dx = \int \frac{2y^{-1}}{1-y^2}\frac{1}{y}\,dy = 2\int \frac{1}{y^2(1-y^2)}\,dy.$$

Tem-se:

$$\frac{1}{y^2(1-y^2)} = \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y} + \frac{C}{1-y} + \frac{D}{1+y};$$

A, B, C e D calculam-se a partir de:

$$1 = A(1-y^2) + By(1-y^2) + Cy^2(1+y) + Dy^2(1-y)$$

atribuindo por exemplo a y os valores 0, 1, -1 e 2:

$$\begin{cases} 1 = A \\ 1 = 2C \\ 1 = 2D \\ 1 = -3A - 6B + 12C - 4D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ C = \frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Vem, desta forma:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^2(1-y^2)}\,dy &= \int \frac{1}{y^2}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}\,dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\,dy \\ &= -y^{-1} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\phi(x) = \int \frac{2e^{-x}}{1-e^{2x}}\,dx = -\frac{2}{y} + \log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + K = -\frac{2}{e^x} + \log\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right| + K.$$

Se $\lim_{x\to+\infty}\phi(x) = 1$ é porque $K = 1$. Assim $-\frac{2}{e^x} + \log\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right| + K$ é ainda a forma geral das primitivas de φ para $x < 0$. Porém, seja qual fôr o valor da constante K, tem-se sempre $\lim_{x\to-\infty}\phi(x) = -\infty$ pelo que é impossível encontrar uma primitiva Ψ de φ em $]-\infty,0[$ verificando $\lim_{x\to-\infty}\Psi(x) = \alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.26 Calcule

$$\int \frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-2)^2}\,dx.$$

(Grupo Ia do Exame de 2ª época de 7/2/79)

[1] Nesta solução e nalgumas outras deste capítulo uma igualdade entre primitivas $\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy$ significa de facto que considerámos uma mudança de variável $y = \theta(x)$ com inversa $x = \theta^{-1}(y)$ e que a função de y do lado direito da igualdade composta com θ iguala o lado esquerdo da igualdade como função de x. Este pequeno abuso de notação revelar-se-á prático ao nível do cálculo.

5.27 Calcule
$$\int \frac{e^{3t}+3e^{2t}+6}{e^{3t}+3e^{t}}\,dt.$$

(Grupo II da Prova de 9/10/78)

5.28 Calcule a primitiva G da função
$$g(x)=\frac{2\log x-1}{x\log x(\log x-1)^2}$$
definida no intervalo $]e,+\infty[$ e que verifica a condição:
$$\lim_{x\to+\infty} G(x)=7.$$

(Grupo Ib da Prova de 25/9/79)

5.29 a) Obtenha uma primitiva de cada uma das seguintes funções:
$$y=\frac{1}{x\log x^2},\qquad y=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},\qquad y=3^x\cos x$$

b) Calcule uma primitiva $F(x)$ de
$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}2x}{(2+\operatorname{sen}x)^2}$$
tal que $F(0)=0$. Haverá outra primitiva de $f(x)$ que se anule para $x=0$? Justifique.

(Grupo Ia e b do Exame de 2ª época de 4/2/80)

5.30 Primitive as funções
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}},\qquad \operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\quad \text{e}\quad \frac{1}{\operatorname{sen}x\cos^2 x}.$$

(Pergunta 1a do Ponto nº3 de 1/10/71)

5.31 Primitive as funções:
$$\frac{\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}\quad \text{e}\quad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos x}.$$

(Pergunta 1a do Ponto nº4 de 1/10/71)

5.32 Determine o conjunto de todas as primitivas da função f definida por
$$f(x)=\frac{1}{1-\operatorname{sen}x-\cos x}\quad \text{no intervalo }]0,\pi/2[.$$

(Pergunta 2 da Prova de 22/3/74)

Resolução: Vamos considerar a mudança de variável $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ que conduz a:
$$\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Note-se que ao variar x em $]0, \frac{\pi}{2}[$ a variável t percorre $]0, 1[$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}\, dx &= \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt \\ &= \int \frac{1}{t(t-1)}\, dt = \int \frac{1}{t-1}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt \\ &= \log|t-1| - \log|t| = \log(1-t) - \log t \\ &= \log \frac{1-t}{t} \qquad \text{(por ser sempre } 0<t<1\text{)}.\end{aligned}$$

Quer dizer:

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}\, dx = \log \frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + K.$$

Capítulo 6

Integral de Riemann

6.1 Definição e primeiras propriedades

6.1 Recorde que se chama *oscilação* de uma função f num subconjunto (não vazio) A do seu domínio à diferença entre o supremo e o ínfimo da função no conjunto A (onde f se supõe limitada). Nestas condições, sendo f uma função limitada no intervalo $[a, b]$, prove que f é integrável em $I = [a, b]$ se for verificada a condição seguinte:

> *Qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe uma decomposição de I tal que a oscilação de f em cada um dos subintervalos de I determinados por essa decomposição é menor que ε.*

Mostre ainda que a verificação da condição referida não é necessária para que f seja integrável.

(Grupo V do 1º Teste de 20/7/78)

Resolução: Sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $d = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ uma decomposição de $[a, b]$ define-se $S_d = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$, $s_d = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ (com $x_0 = a$ e $x_n = b$) onde $M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$, $m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$ e portanto: $S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$.
Sendo verificada a condição do enunciado, dado $\delta > 0$, escolha-se uma decomposição d de $I = [a, b]$ tal que a oscilação $M_i - m_i$ de f em cada um dos subintervalos de I determinados por $d = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ seja menor que $\varepsilon = \frac{\delta}{b-a}$. Virá então:

$$\begin{aligned} S_d - s_d &= \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon(x_{i+1} - x_i) \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\delta}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{\delta}{b-a}(b-a) = \delta. \end{aligned}$$

Quer dizer que dado $\delta > 0$ é possível encontrar uma decomposição d de $[a, b]$ tal que $S_d - s_d < \delta$, o que equivale a dizer que f é integrável em $[a, b]$.
Para ver que a condição do enunciado não é necessária para que f seja integrável, basta considerar a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq x_0, \\ 1, & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

onde $x_0 \in [a, b]$. A função f é integrável mas não existe uma decomposição d de $[a, b]$ tal que a oscilação de f em cada um dos subintervalos de $[a, b]$ determinados por d seja menor do que 1 pois em qualquer subintervalo que contenha x_0 a oscilação de f será igual a 1.

6.2 A cada aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos associar as aplicações f^+ e f^- (designadas por *parte positiva* e *parte negativa* de f, respectivamente) pelas seguintes definições:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}, \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) > 0. \end{cases}$$

a) Indique uma aplicação limitada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f^+ seja integrável em $[0, 1]$ e f^- não o seja.

b) Indique uma aplicação limitada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g^+ + g^-$ seja integrável em $[0, 1]$ e g não o seja.

6.3 Mostre que a integrabilidade de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $[a, b]$ implica a integrabilidade de f^2 em $[a, b]$. **Observação**: Prove-o directamente, isto é, não utilize o conhecimento de que o produto de duas funções integráveis num intervalo é integrável nesse intervalo.

(Pergunta 6 da Prova de 12/3/74)

6.4 Seja φ uma função integrável em $[0, 1]$ e $\phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt$ com $a \in [0, 1]$. Justifique que ϕ é integrável em $[0, 1]$ e mostre que existe $b \in [0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 \phi(t)\, dt = \int_a^b \varphi(t)\, dt.$$

(Na resolução desta alínea poderá ser-lhe útil recorrer ao teorema da média).

(Grupo IVb do 1º Teste de 11/9/78)

Resolução: Sendo φ integrável em $[0, 1]$, a função ϕ é contínua em $[0, 1]$ e portanto integrável em $[0, 1]$. Existe por isso $b \in [0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 \phi(t)\, dt = \phi(b)(1 - 0) = \phi(b) = \int_a^b \varphi(t)\, dt.$$

6.5 Sejam f e φ definidas em $[a, b]$ maiores ou iguais a 0 e integráveis em $[a, b]$. Suponha-se que φ é crescente e designe-se por $\varphi(b^-)$ o $\lim_{x \to b^-} \varphi(x)$.

1) Mostre que: $\exists_{c \in [a,b]} : \int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(b^-) \int_c^b f(x)\, dx$.

2) A igualdade seria válida se substituissemos $\varphi(b^-)$ por $\varphi(b)$?

3) Mostre que se φ é estritamente crescente em $]a, b[$ e $\int_a^b f(x)\, dx \neq 0$ então c deverá ser diferente de a e de b.

(Grupo IV do 1º Teste de 11/9/79)

6.2 Teorema fundamental. Regra de Barrow

6.6 Seja f uma função duas vezes diferenciável e tal que $f'(x)$ e $f''(x)$ são positivas em todo o ponto $x \in \mathbb{R}$; seja ainda

$$g(x) = \int_0^x f(t^2)\, dt, \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}.$$

Justifique que g é três vezes diferenciável, calcule $g''(x)$ e $g'''(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ e aproveite o resultado para estudar, quanto à concavidade e inflexões, o gráfico de g.

(Pergunta 4a do Ponto nº5 de 25/10/71)

Resolução: Como f é contínua em $\mathbb{R}$ tem-se em $\mathbb{R}$, pelo *Teorema Fundamental do Cálculo*, $g'(x) = f(x^2)$. Como f é duas vezes diferenciável segue do *Teorema de Derivação da Função Composta* que:

$$g''(x) = 2f'(x^2)x,$$
$$g'''(x) = f''(x^2)(2x)^2 + f'(x^2)2 = 4f''(x^2)x^2 + 2f'(x^2).$$

O estudo da concavidade e inflexão de g pode fazer-se através do sinal de $g''(x)$: como $f'(x)$ e $f''(x)$ são positivas: $g''(x) > 0$ se $x > 0$, $g''(x) < 0$ se $x < 0$. Para $x > 0$, a concavidade está voltada para cima, para $x < 0$, voltada para baixo. Em $x = 0$ há pois um ponto de inflexão ($g''(0) = 0$ e $g'''(0) > 0$).

6.7 Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável no ponto 0,

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

e $h = g \circ g$, calcule $h''(0)$, expresso em $f(0)$ e $f'(0)$.

(Pergunta 3b do Ponto nº1 de 1/10/71)

6.8 Sendo f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$,

a) Justifique que a igualdade:
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$
define uma função F, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

b) Sendo $\varphi = F \circ F$ (isto é, $\varphi(x) = F[F(x)], \forall_{x\in\mathbb{R}}$), prove que, se $f(x) < 0, \forall_{x\in\mathbb{R}}$, φ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

c) Calcule $\varphi'(0)$ e $\varphi''(0)$, em função de $f(0)$ e $f'(0)$.

(Pergunta 4 da Prova de 20/2/71)

6.9 Prove que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, verificando a condição

$$\int_0^x f(u)\,du = xf(x), \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

então f é constante. [**Sugestão**: derive ambos os membros da igualdade anterior.)

(Pergunta 4a da Prova de 23/1/73)

6.10 Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ prove que, se é nulo o integral de f em *qualquer* intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Mostre, por meio de exemplos, que a conclusão precedente poderia ser falsa em qualquer das duas hipóteses seguintes:

1. Se, em lugar de supor f contínua em $\mathbb{R}$, se suposesse apenas que f era integrável em qualquer intervalo limitado;

2. Se, em vez de supor que é nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, se admitisse que era nulo o integral de f em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ com comprimento igual a 1.

(Pergunta 4b da Prova de 2ª época de 8/1/73)

6.11 Sendo φ uma função contínua em $\mathbb{R}$, e para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt,$$

calcule $\phi'(x)$ e $\phi''(x)$. Justifique todos os passos dos cálculos efectuados.

(Pergunta 4a da Prova de 4/11/72)

6.12 Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ tal que $g(1) = 5$ e $\int_0^1 g(t)\,dt = 2$.
Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,dt.$$

Mostre que f admite derivadas contínuas em $\mathbb{R}$ até à 3ª ordem e calcule $f''(1)$ e $f'''(1)$.

(Grupo III da Prova de 23/3/77)

Resolução:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x^2 - 2xt + t^2)g(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)\,dt - x\int_0^x tg(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)\,dt. \end{aligned}$$

As funções $g(t), tg(t), t^2g(t)$ são contínuas em $\mathbb{R}$ pelo que, pelo *teorema fundamental do Cálculo*:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x\int_0^x g(t)\,dt + \frac{1}{2}x^2 g(x)\right) - \left(\int_0^x tg(t)\,dt + x^2 g(x)\right) + \frac{1}{2}x^2 g(x) \\ &= x\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x tg(t)\,dt, \\ f''(x) &= \int_0^x g(t)\,dt + xg(x) - xg(x) = \int_0^x g(t)\,dt \\ f'''(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Tem-se pois $f''(1) = \int_0^1 g(t)\,dt = 2$ e $f'''(1) = g(1) = 5$.

6.13 Calcule $\varphi'(x)$ sendo $\varphi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$.

(Grupo II1c da Prova de 18/7/77)

6.14 Seja φ a função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula $\varphi(x) = \int_{\cos x}^{x^3+1} e^{-t^2}\,dt$. Indique, justificando, os valores de $\varphi(0)$ e $\varphi'(0)$.

(Grupo IIa da Prova de 25/9/79)

6.15 Demonstre que, se f é contínua em $\mathbb{R}$ e se

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt = 0, \text{ para todo o } x \in \mathbb{R},$$

então f é uma função ímpar. Dê um exemplo de uma função g definida em $\mathbb{R}$, verificando a condição $\int_{-x}^x g(t)\,dt = 0, \forall_{x\in\mathbb{R}}$, e que não seja ímpar.

6.16 Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}.$$

(Grupo Ib da Prova de 28/2/74)

6.17 Determine o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x e^{-t^2}\, dt}{1-e^{-x^2}}.$$

(Grupo II1c da Prova de 2/12/76)

Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando sucessivamente a regra de Cauchy:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x e^{-t^2}\, dt}{1-e^{-x^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2}\, dt + xe^{-x^2}}{e^{-x^2}2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}+\left(e^{-x^2}-xe^{-x^2}2x\right)}{-e^{-x^2}4x^2+e^{-x^2}2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-x^2}(1-x^2)}{e^{-x^2}(2-4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-x^2)}{2-4x^2} = 1.\end{aligned}$$

6.18 Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^5\, dt}{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2\, dt}.$$

(Grupo IIc do 2º Teste de 28/7/80)

6.19 a) Determine o valor da constante real K, por forma a que $f'(1) = 0$, sendo

$$f(x) = \int_{x^2}^{K\log x} e^{-t^2}\, dt.$$

b) Determine uma função g de classe C^2 que satisfaça as seguintes condições:

$$\int_0^x g''(t)\, dt = x^3 + x \quad \wedge \quad g'(0) = g(0) = 1.$$

(Grupo III da Prova de 22/9/78)

Resolução:

a) Para derivar f fazemos a seguinte observação: sendo $f(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(t)\, dt$ com g contínua num intervalo, φ_1, φ_2 funções com valores nesse intervalo e a um qualquer ponto desse intervalo, tem-se $f(x) = \int_a^{\varphi_2(x)} g(t)\, dt - \int_a^{\varphi_1(x)} g(t)\, dt$. Daí resulta que, sendo φ_1 e φ_2 funções diferenciáveis, e usando o *Teorema Fundamental do Cálculo* e o *Teorema de derivação da Função Composta*:

$$f'(x) = g(\varphi_2(x))\varphi_2'(x) - g(\varphi_1(x))\varphi_1'(x).$$

Logo, no caso $f(x) = \int_{x^2}^{K\log x} e^{-t^2}\, dt$ vem:

$$f'(x) = e^{-(k\log x)^2}\frac{K}{x} - e^{-x^4}2x$$

e portanto $f'(1) = K - 2e^{-1}$. Ter-se-à $f'(1) = 0$ se $K = \frac{2}{e}$.

b) Temos $\int_0^x g''(t)\, dt = g'(x) - g'(0)$, isto é, $g'(x) = x^3 + x + 1$ e portanto $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + x + K$ sendo $K = g(0) = 1$. Portanto $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

6.20 Indique onde está o erro no cálculo seguinte:

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{2} = -\frac{3}{2}.$$

(Grupo Ic da Prova de 7/74)

Resolução: A regra de Barrow, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ aplica-se[1] a uma função f integrável em $[a, b]$ e com uma primitiva F em $[a, b]$. Ora, embora $F(x) = -\frac{1}{x}$ seja uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e portanto em $[-1, 2] \setminus \{0\}$, não é verdade que $F(x)$ seja primitiva de $f(x)$ em $[-1, 2]$, logo a fórmula de Barrow não é aplicável pelo que é ilegítimo escrever $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{2}$. Pode de resto observar-se que o integral em causa não existe; visto que a função integranda $\frac{1}{x^2}$, não é limitada no intervalo de integração.

6.21 Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x \cos 2x\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 e^{t+e^t}\,dt.$$

(Note que ambas as funções integrandas são facilmente primitiváveis.)

(Grupo IIa do Exame Final de 18/9/80)

6.22 Estude, quanto à existência de assímptotas, a função f definida por

$$f(x) = \log x \int_x^{2x} \frac{ds}{s \log s}, \qquad \text{para } x > 1.$$

(Pergunta 4 da Prova de 12/3/74)

6.23 Calcule

$$\int_1^{\pi} x \operatorname{arctg} x\,dx.$$

(Grupo I2a da Prova de 19/9/77)

6.24 Calcule

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u\,du.$$

(Grupo IIa do Exame de 2/10/80)

6.25 Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$ e que admite segunda derivada contínua nesse intervalo. Exprima $\int_a^b x f''(x)\,dx$ como função dos valores de f e f' nos pontos a e b.

(Grupo IV2 do Exame de 18/7/1977)

6.26 Calcule

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-3}, \qquad \int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx.$$

(Grupo II2 da Prova de 2/12/76)

[1] Assume-se a convenção habitual de que do ponto de vista da integração uma função pode não estar definida num número finito de pontos. Desta forma a solução do problema não tem a ver com o facto da função integranda não estar definida em 0 mas sim com a função ser ilimitada numa qualquer vizinhança de 0.

6.27 Calcule

$$\int_1^e \log x\,dx, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}\,dx.$$

(Pergunta 2a e b da Prova de 23/3/77)

6.28 Calcule

$$\int_2^3 \frac{1}{x^3+x}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx.$$

(Grupo Ia do 2º Teste de 28/7/80)

6.29 Calcule

$$\int_1^2 \frac{4x-4}{x^4+4x^2}\,dx.$$

(Grupo IIa da Prova de 11/9/78)

6.30 Calcule

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^2(x^2+4)}\,dx.$$

(Grupo Ic da Prova de 28/2/74)

6.31 Sendo $f'(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1}$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ e $f(0)=1$, calcule:

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

(Pergunta 3a da Prova de 20/7/71)

6.32 Calcule o integral

$$\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\,dt.$$

(Grupo II da Prova de 20/7/78)

6.33 Calcule

$$\int_0^1 \frac{e^t+4}{e^{2t}+4}\,dt.$$

(Grupo Ic do Exame de 2ª época de 11/2/80)

6.34 Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{8\operatorname{tg} x}{3+\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$$

(Grupo Ib da Prova de 18/9/79)

6.35 Calcule

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2-\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$$

(Grupo 1a da Prova de 18/12/72)

Resolução: Uma maneira de calcular o integral é observar que $x \mapsto \cos x$ é uma bijecção de $[0, \pi]$ em $[-1, 1]$ e usar a mudança de variável $y = \cos x$.
Tem-se então, designando o integral que pretendemos calcular por I:

$$\begin{aligned} I \equiv \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx &= \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2 - \operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} \operatorname{sen} x\, dx \\ &= -\int_1^{-1} \frac{1 - y^2}{1 + y^2}\, dy = \int_{-1}^1 \frac{1 - y^2}{1 + y^2}\, dy. \end{aligned}$$

Ora $\frac{1-y^2}{1+y^2} = -1 + \frac{2}{1+y^2}$ e daí $\int \frac{1-y^2}{1+y^2}\, dy = -y + 2 \operatorname{arctg} y$. Quer dizer:

$$\begin{aligned} I &= [-y + 2 \operatorname{arctg} y]_{-1}^1 = (-1 + 2 \operatorname{arctg} 1) - (1 + 2 \operatorname{arctg}(-1)) \\ &= \left(-1 + 2\frac{\pi}{4}\right) - \left(1 - 2\frac{\pi}{4}\right) = -2 + \pi = \pi - 2. \end{aligned}$$

6.36 Aplicando a regra de Barrow prove que, sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c - x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

(Pergunta 4a da Prova de 5/7/71)

6.37 Seja F uma função contínua em $\mathbb{R}$ e sejam a, b, c números reais com $c \neq 0$. Mostre que

$$\int_a^b F(x)\, dx = c \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{b}{c}} F(cx)\, dx.$$

(Grupo IV da Repetição do 1º Teste de 22/9/78)

6.38 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a um ponto de $\mathbb{R}$. Mostre que:

a) Se f é par, $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx$.

b) Se f é ímpar, $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$.

(Grupo IV1 do Exame de 18/7/1977)

6.39 Sendo φ diferenciável em $\mathbb{R}$, f contínua em $\mathbb{R}$ e h definida pela fórmula seguinte

$$h(x) = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} x^2 f(t)\, dt,$$

calcule $h'(x)$. Supondo agora que φ e f são ímpares, mostre que h é par.

(Grupo IIb da Repetição do 2º Teste de 18/9/80)

Resolução:

$$\begin{aligned} h'(x) =& \frac{d}{dx} \left(x^2 \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} f(t)\, dt \right) \\ =& 2x \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} f(t)\, dt + x^2 (f(\varphi(x^3))\varphi'(x^3) 3x^2 - f(\varphi(x))\varphi'(x)). \end{aligned}$$

Ora se φ e f são ímpares, tem-se, usando a mudança de variável $t = -u$:

$$\begin{aligned} h(-x) &= \int_{\varphi(-x)}^{\varphi(-x^3)} x^2 f(t)\,dt = \int_{-\varphi(x)}^{-\varphi(x^3)} x^2 f(t)\,dt \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} x^2 f(-u)(-1)\,du = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x^3)} x^2\, f(u)\,du = h(x), \end{aligned}$$

pelo que h é par.

6.40 Considere a função φ definida no intervalo $]0,+\infty[$ pela fórmula

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t\,dt.$$

a) Calcule $\varphi(2)$.

b) Mostre que φ é diferenciável (em todo o seu domínio) e, supondo $x > 0$, indique, justificando, o valor de $\varphi'(x)$.

c) Estude a função φ sob o ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto c do domínio de φ satisfazendo a condição $\varphi(c) = 0$.

(Pergunta 2 da Prova de 23/1/72)

6.41 Considere a função F definida pela igualdade

$$F(x) = \int_1^x \frac{1+\sqrt[3]{u^2}}{3u(1+\sqrt[3]{u})^2}\,du$$

no conjunto dos valores reais de x para os quais tem sentido o integral do segundo membro.

a) Calcule $F'(3)$ e $F''(3)$.

b) Calcule $F(3)$.

c) Indique o domínio de F, sob a forma de intervalo, e justifique que é efectivamente esse o domínio.

(Pergunta 3 da Prova de 8/1/73)

6.42 a) Seja g a função definida pela fórmula $g(x) = \int_0^{\log x} x\,e^{t^2}\,dt$. Mostre que $g''(1) = 1$.

b) Seja h uma função definida em $\mathbb{R}$, contínua, ímpar e estritamente crescente e seja H a função definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt.$$

Justifique que H é diferenciável em $\mathbb{R}$, que é função par, que tem um mínimo absoluto no ponto zero, e determine os intervalos de monotonia de H.

(Grupo III da Prova de 11/9/78)

6.43 a) Justifique que a igualdade (onde surge um integral que *não* deverá calcular)

$$\varphi(x) = \int_0^x (2+\operatorname{sen} t^2)\,dt$$

define uma função φ indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$.
Mostre que φ é estritamente crescente e estude o sinal de $\varphi(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$.
Será φ par? E ímpar? Justifique.

b) Considere a função ϕ definida em $\mathbb{R}$ pela equação seguinte

$$\phi(x) = \int_x^{x^2-1} e^{\operatorname{sen} t}\, dt.$$

Determine a função derivada.

(Grupo IV de 20/7/78)

6.44 Seja f uma função diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Considere, para cada $h \neq 0$, uma nova função F_h definida por

$$F_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\, du.$$

Como sabe, $F_h(x)$ representa o valor médio de f no intervalo $[x, x+h]$.

a) Em que pontos do seu domínio é F_h diferenciável?

Justifique a resposta e determine a derivada $F_h'(x) = \frac{d}{dx}(F_h(x))$.

b) Para cada valor de x, $F_h(x)$ e $F_h'(x)$ dependem de h. Considere então, para um dado $x = a$, duas outras funções, φ e ψ, definidas respectivamente pelas igualdades $\varphi(h) = F_h'(a)$ e $\psi(h) = F_h(a)$, $\forall_{h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Determine

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0} \psi(h).$$

(Pergunta 4 da Prova de 6/7/71)

6.45 Como sabe, diz-se que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem período a sse $f(x+a) = f(x)$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$.

Supondo que a função contínua f tem período a e que g é uma primitiva de f (em $\mathbb{R}$), mostre que a função $g(x+a)-g(x)$ é constante; aproveite o resultado para provar que, sendo f uma função contínua que tenha período a, as primitivas de f terão também esse período sse $\int_0^a f(x)\, dx = 0$.

(Grupo IIIa do 2º Teste de 28/7/80)

6.46 a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $\varphi(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \log(1+t^2)\, dt$. Sem efectuar qualquer integração prove que $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$ (qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$) e determine os valores de x, pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$ e tais que a tangente ao gráfico de φ no ponto $(x, \varphi(x))$ seja horizontal; indique ainda, justificando, quais desses valores são pontos de máximo ou de mínimo para a função φ.

b) Sejam u e v funções contínuas em $\mathbb{R}$, tais que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^x u(t)\, dt = \int_b^x v(t)\, dt,$$

onde a e b são números reais. Prove que $u = v$ e que $\int_a^b u(x)\, dx = 0$.

c) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, & \text{se } x \neq 0, \\ f(0), & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Prove que F é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; mostre que, nas condições indicadas, F pode não ser diferenciável na origem.

(Grupo III da Prova de 28/6/79)

6.47 Sejam f e φ duas funções que admitam segundas derivadas contínuas em $\mathbb{R}$ e seja

$$F(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(t)\,dt.$$

a) Exprima $F'(x)$ e $F''(x)$ em termos das derivadas de f e φ.

b) Supondo que $f(x) > 0$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$ e $\varphi''(x) \neq 0$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$, mostre que os pontos de máximo de F coincidem com os de φ e os pontos de mínimo de F coincidem com os pontos de mínimo de φ.

c) Mostre por meio de um exemplo que, omitindo a hipótese $f(x) > 0$, $\forall_{x\in\mathbb{R}}$, F pode admitir máximos e mínimos em pontos onde φ não admita extremos.

(Grupo II do Exame de 2ª época de 7/2/79)

6.48 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e ϕ o seu integral indefinido com origem no ponto 0.

a) Se ϕ tem máximo no ponto a, qual é o valor de $f(a)$? Justifique cuidadosamente a resposta.

b) Prove que, se $\phi(c) = 0$, sendo $c \neq 0$, f tem pelo menos uma raiz real, com o mesmo sinal de c.

c) Mostre que, sendo $a > 0$ e $I = [0, a]$,

$$\max_{x\in I} |\phi(x)| \leq a \max_{x\in I} |f(x)|$$

e dê um exemplo de uma função f para a qual se verifique a igualdade, qualquer que seja o ponto $a > 0$.

(Pergunta 4 da Prova de 2ª época de 18/12/72)

Resolução:

a) Sendo f contínua em $\mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, sendo $\phi'(x) = f(x)$. Ora se uma função ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem um máximo em a então necessáriamente $\phi'(a) = 0$, pelo que $f(a) = 0$.

b) O teorema do valor médio e a continuidade de f garantem que existe um α no intervalo de extremos 0 e c tal que $\int_0^c f(t)\,dt = f(\alpha)(c - 0)$. Ora, se $\phi(c) = 0$, então $f(\alpha)c = 0$ e, como $c \neq 0$, tem-se $f(\alpha) = 0$. Como α está no intervalo entre 0 e c, tem o sinal de c.

c) Para todo o $x \in I$ tem-se $|\phi(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^a |f(t)|\,dt \leq a \max_{t\in I} |f(t)|$. Logo $\max_{t\in I} |\phi(x)| \leq a \max_{t\in I} |f(t)|$. Qualquer função constante verifica a igualdade.

6.49 Supondo que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, os valores $f(x)$ e $f'(x)$ são ambos negativos, considere a função g definida em $\mathbb{R}$ pela fórmula:

$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\,dt.$$

1. Determine os intervalos em que g é monótona, os seus pontos de máximo ou de mínimo e as raízes da equação $g(x) = 0$. Estude ainda o sentido da concavidade do gráfico de g.

2. A função g é majorada? E minorada? Justifique.

(Grupo IIIa do Exame de 2/10/80)

6.50 Sendo φ uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$ e

$$\Psi(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt, \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$

1. Estude o sinal de $\Psi(x)$.
2. Justifique que Ψ é diferenciável e calcule Ψ'.
3. Prove que Ψ é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$.
4. Justifique que Ψ tem mínimo (absoluto) e, designando esse mínimo por m, prove que se verifica necessáriamente a relação:

$$|m| \leq \frac{1}{4} \max_{x\in[0,1]} \varphi(x).$$

(Grupo IIIb do 2º Teste de 28/7/80)

6.51 Sendo $\varphi(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ se $x \neq 0$ e $\varphi(0) = 0$, considere a função g, definida pela fórmula: $g(x) = \int_0^x \varphi(u)\,du \quad (x \in \mathbb{R})$. Nestas condições:

1. Justifique que a função g é ímpar.
2. Determine $g'(x)$ para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$; justifique as respostas.
3. Indique as abcissas dos pontos em que o gráfico de g tem tangente horizontal. Justifique que g é estritamente crescente.
4. Justifique que g é limitada.

(Grupo IIIb do Exame Final de 18/9/80)

6.52 Justifique que a fórmula

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} e^{-\sqrt{t}}\,dt$$

define uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que φ é uma função par. Calcule a derivada de φ nos seus pontos de diferenciabilidade, e estude φ quanto ao crescimento e convexidade.

Sendo a um número positivo tal que $e^x > x^4$ para todo o $x > a$, determine em função de a, um majorante do $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

(Grupo IVb da Prova de 18/9/79)

6.53 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x) > 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ e seja

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$

a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}$. Qual é o valor da derivada de g num ponto $a \in \mathbb{R}$?

b) Mostre que g é estritamente crescente e que, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xg(x) > 0$.

c) Prove que, se $f(x)$ tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e mostre, por meio de exemplos, que, se $f(x)$ tender para zero quando $x \to +\infty$, o limite de $g(x)$ quando $x \to +\infty$ pode ser finito ou $+\infty$.

(Pergunta 4 da Prova de 1/8/72)

6.54 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e seja g a função definida pela fórmula

$$g(x) = \int_0^{x+1} f(t)\,dt, \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$

a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e indique, justificando, o valor de $g'(x)$.

b) Prove que, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então também $\lim_{x\to+\infty}[g(x) - g(x-1)] = 0$.

c) Mostre, por meio de um exemplo, que pode verificar-se a igualdade

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x) - g(x-1)] = 0$$

sem que $f(x)$ tenha limite quando $x \to +\infty$.

(Pergunta 4 da Prova de 4/9/72)

6.55 Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e g a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pela igualdade

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

a) Indique o valor de $\lim_{x\to 0} g(x)$. Justifique cuidadosamente a resposta.

b) Prove que g é uma função constante (em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) se e só se f também o é (em $\mathbb{R}$).

c) Prove que o contradomínio de g está contido no de f.

d) Sendo α um dado número real, dê um exemplo de uma função f (contínua em $\mathbb{R}$) sem limite quando $x \to +\infty$ e tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \alpha$.

(Pergunta 4 da Prova de 11/10/72)

Resolução:

a) Como f é contínua em $\mathbb{R}$, o seu integral indefinido é diferenciável usando o *Teorema Fundamental do Cálculo*, permitindo usar a *regra de Cauchy* para obter:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1} = f(0).$$

b) Se g for constante e igual a k vem: $\int_0^x f(t)\,dt = kx$ e por derivação $f(x) = k$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se f for constante o cálculo do integral permite obter que g toma o mesmo valor constante.

c) Se α pertence ao contradomínio de g então existe $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $\alpha = g(\beta)$ e portanto, usando o *teorema do valor médio* e a continuidade de f vem $\alpha = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta f(t)\,dt = \frac{1}{\beta}(\beta - 0)f(\xi) = f(\xi)$; logo α pertence ao contradomínio de f.

d) Seja $f(t) = \alpha + \cos t$. Então não existe $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ e, no entanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x (\alpha + \cos\, t)\,dt = \alpha + \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \alpha.$$

6.56 Considere a função $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

a) Determine o seu domínio e mostre que é par.

b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.

c) Mostre que existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f|_{]0,\varepsilon[}$ é monótona e limitada.

d) Que pode concluir quanto à existência de limite da função f na origem?

(Grupo III da Prova de 4/2/80)

6.57 Seja f uma função real definida e diferenciável no intervalo $[0, +\infty[$ e tal que:

$$f(0) = 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty; \qquad f'(x) > 0 \quad \forall_{x\in[0,+\infty[}.$$

1. Mostre que f^{-1} é integrável no intervalo $[0, b]$, $\forall_{b>0}$.
2. Prove (analiticamente) que, qualquer que seja $t \in [0, +\infty[$

$$tf(t) = \int_0^t f + \int_0^{f(t)} f^{-1}$$

e aproveite o resultado para mostrar que, quaisquer que sejam $a, b \in [0, +\infty[$

$$ab \le \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}.$$

(Grupo IVb do Exame Final de 25/9/78)

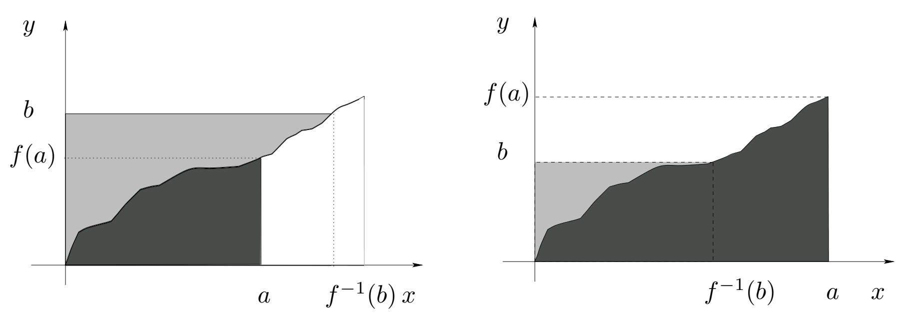

Figura 6.1: Os casos $b > f(a)$ e $b < f(a)$.

Resolução:

1. Nas condições do enunciado, f é uma função estritamente crescente e contínua em $[0, +\infty[$. Além disso, como $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ e $f(0) = 0$, o *teorema do valor intermédio* garante que o seu contradomínio é $[0, +\infty[$. Assim, existe $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Pelo teorema de continuidade da inversa, f^{-1} também é contínua e portanto integrável em qualquer intervalo $[0, b]$ com $b > 0$.

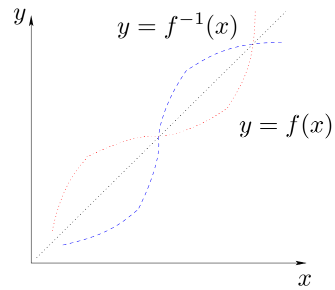

Figura 6.2: Simetria do gráfico de uma função f e da sua inversa f^{-1} relativamente à bissectriz do 1º quadrante.

2. Considere-se $\int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du$ e façamos neste integral a mudança de variável $u = f(v)$. Obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du &= \int_0^t f^{-1}(f(v))f'(v)\,dv = \int_0^t vf'(v)\,dv \\ &= vf(v)|_0^t - \int_0^t f(v)\,dv = tf(t) - \int_0^t f(v)\,dv.\end{aligned}$$

Então $tf(t) = \int_0^t f(v)dv + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du$. Se interpretarmos graficamente os números $\int_0^a f$ e $\int_0^b f^{-1}$ veremos que eles correspondem às medidas das áreas a diferentes tons de cinzento na figura 6.1.

Esta interpretação geométrica resulta do facto dos gráficos de f e f^{-1} se relacionarem (uma vez escolhidas as mesmas unidades de medida nos dois eixos), através de uma simetria em relação à bissectriz do primeiro quadrante como se ilustra na figura 6.2.

No caso de ser $b = f(a)$ é claro que:

$$ab = af(a) = \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} = \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}.$$

Se $b > f(a)$:

$$\begin{aligned}ab &= a(f(a) + b - f(a)) = af(a) + a(b - f(a)) \\ &= \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} + \int_{f(a)}^b f^{-1}(f(a))\,dt \\ &\leq \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} + \int_{f(a)}^b f^{-1} \\ &= \int_0^a f + \int_0^b f^{-1},\end{aligned}$$

em que no penúltimo passo usámos o facto de f^{-1} ser crescente.

Se $b < f(a)$ (e portanto $f^{-1}(b) < a$):

$$\begin{aligned}
ab &= (f^{-1}(b) + a - f^{-1}(b))b = f^{-1}(b)b + (a - f^{-1}(b))b \\
&= \int_0^{f^{-1}(b)} f + \int_0^{f(f^{-1}(b))} f^{-1} + (a - f^{-1}(b))b \\
&= \int_0^{f^{-1}(b)} f + \int_0^{b} f^{-1} + (a - f^{-1}(b))b \\
&\leq \int_0^{f^{-1}(b)} f + \int_0^{b} f^{-1} + \int_{f^{-1}(b)}^{a} f \\
&= \int_0^{f^{-1}(b)} f + \int_{f^{-1}(b)}^{a} f + \int_0^{b} f^{-1} \\
&= \int_0^{a} f + \int_0^{b} f^{-1}.
\end{aligned}$$

onde também utilizámos o teorema do valor médio, o facto de f ser crescente e a desigualdade:

$$\int_{f^{-1}(b)}^{a} f \geq (a - f^{-1}(b)) \min_{[f^{-1}(b),a]} f = (a - f^{-1}(b))f(f^{-1}(b)) = (a - f^{-1}(b))b.$$

Se $b > f(a)$ podemos usar o caso anterior aplicado a f^{-1}.

6.58 a) Para cada $\alpha > 0$ e cada $x \geq 0$ existe $\int_0^\alpha t^x e^{-t}\,dt$. Porquê?

b) Mostra-se que existe $\lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^\alpha t^{x-1} e^{-t}\,dt$ (para $x \geq 1$) e representa-se por $\Gamma(x)$. Mostre que tem lugar a relação $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $x \geq 1$. Calcule $\Gamma(1)$. O que pode dizer de $\Gamma(n)$ com $n \in \mathbb{N}_1$?

(Grupo IVb da Prova de 7/74)

6.59 Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, designa-se por $I_a f$ o integral indefinido de f com origem no ponto a.

a) Utilizando o método de integração por partes, mostre que $I_a(I_a f)$ (que designaremos por $I_a^2 f$) é dado pela seguinte expressão:

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t)\, f(t)\, dt.$$

b) Sendo D o operador de derivação, mostre que

$$D(I_a f) = f \quad \text{e} \quad D^2(I_a^2 f) = f.$$

c) Supondo agora f com segunda derivada contínua em $\mathbb{R}$, mostre que $I_a^2(D^2 f)$ é o resto da fórmula de Taylor resultante da aproximação de f pelo seu polinómio de Taylor de grau ≤ 1 no ponto a. [**Sugestão**: pode ser-lhe útil o resultado obtido na alínea a) e uma nova utilização da integração por partes].

(Grupo III da Repetição do 2º Teste de 18/9/80)

Resolução:

a) Como $(I_a f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ vem

$$\begin{aligned}(I_a(I_a f))(x) &= \int_a^x \left(\int_a^t f(u)\,du\right)\,dt = \int_a^x (1\int_a^t f(u)\,du)\,dt \\ &= t\int_a^t f(u)\,du|_a^x - \int_a^x tf(t)\,dt = x\int_a^x f(u)\,du - \int_a^x tf(t)\,dt \\ &= \int_a^x xf(t)\,dt - \int_a^x tf(t)\,dt = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(D(I_a f))(x) &= D\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x) \\ (D^2(I_a^2 f))(x) &= D^2\left(\int_a^x (x-t)f(t)\,dt\right) = \\ &= D^2\left(x\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x tf(t)\,dt\right) = \\ &= D\left(\int_a^x f(t)\,dt + xf(x) - x\,f(x)\right) = f(x)\end{aligned}$$

c) Da alínea (a) temos:

$$\begin{aligned}(I_a^2 f'')(x) &= \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = (x-t)f'(t)]_a^x - \int_a^x (-1)f'(t)\,dt \\ &= -(x-a)f'(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = -(x-a)f'(a) + f(x) - f(a).\end{aligned}$$

Então $f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+(I_a^2 f'')(x)$, o que permite concluir imediatamente que $I_a^2 D^2 f$ é o resto da fórmula de Taylor referida no enunciado.

6.3 Cálculo de áreas, comprimentos de linha e volumes de sólidos de revolução

6.60 Calcule a área da região plana definida pelas seguintes condições:

$$\begin{cases} y < e^x, \\ y > \log x, \\ 1 \le x \le e. \end{cases}$$

(Grupo I1 da Prova de 2/12/76)

Resolução: Como temos $e^x > \log x$ para todo o $x > 0$ a área é dada por

$$\int_1^e (e^x - \log x)\,dx = [e^x - x(\log x - 1)]\,|_1^e = e^e - e - 1.$$

6.61 Calcule a área da região plana definida pelas condições $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq \sqrt{3}x^2$.

(Grupo IIb da Prova de 11/9/78)

6.62 Calcule a área da região do plano XOY limitada pelo gráfico da função $y = \operatorname{arctg} x$ e pelas rectas de equação $x = 1$ e $y = 0$.

(Pergunta 4a da Prova de 7/74)

6.63 Determine a área da região plana constituída pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem as condições seguintes:

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, \quad y \geq \frac{\pi}{16}x^2, \quad y \leq \operatorname{arctg} x.$$

(Grupo Ic da Prova de 4/2/80)

6.64 Calcule a área da região contida no semiplano $x \geq 0$ e limitada pelas linhas de equações $y = \operatorname{arctg} x$ e $y = \frac{\pi}{4}x$.

(Pergunta 2b do Ponto nº5 de 25/10/71)

6.65 Calcule a área do conjunto $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x \operatorname{arctg} x \leq y \leq \frac{\pi}{4}x\}$.

(Grupo IIc do Exame Final de 18/9/80)

6.66 Calcule a área da região plana limitada pelas linhas de equações $x = 0$, $x = 2y$ e $y = \frac{1}{1+x^2}$.

(Grupo Ia da Prova de 18/9/79)

6.67 Determine a área do conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas verificam as condições: $0 \leq x \leq 1$ e $\operatorname{arcsen} x \leq y \leq 2 \operatorname{arctg} x$.

(Grupo IIa do 2º Teste de 28/7/80)

6.68 Calcule a área do conjunto limitado pelos arcos das curvas de equações $y = x^2$ e $y = x^2 \cos x$ compreendidos entre a origem e o ponto de menor abcissa positiva em que as duas curvas se intersectam.

(Pergunta 2b do Ponto nº2 de 1/10/71)

Resolução: Os pontos de intersecção dos dois gráficos têm por abcissas as soluções da equação $x^2 = x^2 \cos x$ que são $x = 0$ e $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. O ponto de intersecção de menor abcissa positiva é pois $x = 2\pi$. A área pedida é então:

$$A = \int_0^{2\pi} (x^2 - x^2 \cos x)\, dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx = \frac{8\pi^3}{3} - \int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx.$$

Ora

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x\, dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx \\ &= x^2 \operatorname{sen} x - 2\left(x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx\right) = \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x + \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

pelo que $A = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi$.

6.69 Calcule a área do conjunto dos pontos $P(x, y)$, cujas coordenadas verificam as condições $1 \le x \le 2$ e $0 \le y \le \cos(\log x)$. (Na primitivação pode utilizar de início a substituição $x = e^t$).

(Pergunta 2b da Prova de 11/10/72)

6.70 Calcule a área da região do plano limitada pelos arcos das curvas de equações:

$$y = \log x \text{ e } y = \log^2 x$$

compreendidos entre os pontos de intersecção das duas curvas.

(Grupo IIb do Exame de 2/10/80)

6.71 Calcule o valor de $a \in [1, +\infty[$ por forma a que a área da parte colorida na figura 6.3 seja igual a π.

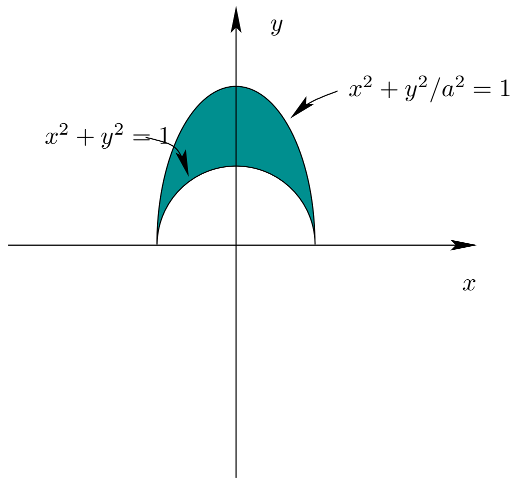

Figura 6.3: A figura do exercício 6.71.

(Grupo Ib do Exame de 2ª época de 7/2/79)

Resolução: Designando a área pretendida por A temos

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \left(a\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} \right) dx = \int_{-1}^{1} (a-1)\sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= (a-1) \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = (a-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cos t\, dt \\ &= (a-1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt. \end{aligned}$$

Ora $\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t)$ pelo que:

$$\begin{aligned} A &= (a-1) \left[\frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (a-1)\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(-\pi) \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{2}(a-1). \end{aligned}$$

Querendo que $\frac{\pi}{2}(a-1) = \pi$ terá de ser $a = 3$.

6.72 Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) cujas coordenadas verificam as condições:

$$|x| \leq 1 \qquad \wedge \qquad 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 - x^4}.$$

(Pergunta 2b da Prova de 4/11/72)

6.73 Considere duas circunferências de raio igual a 1, com centro nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$, que limitam dois círculos no plano.

Determine a área do conjunto reunião desses círculos.

(Pergunta 2b da Prova de 5/7/71)

6.74 Calcule a área do conjunto limitado pelos arcos das curvas de equações $y = x \operatorname{sen} x$ e $y = x \cos x$, compreendidos entre a origem e o ponto de menor abcissa positiva em que as duas curvas se intersectam.

(Pergunta 2a do Ponto nº 1 de 1/10/71)

6.75 Determine a área da "região" do plano definida pelas condições:

$$-\sqrt{x^2 + x} \leq y \leq \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \qquad \text{e} \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

(Grupo IIb do 1º Teste de 11/9/79)

6.76 Determine a área do conjunto de menor área limitado pela elipse de equação:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

e pela parábola $x^2 = 2y$.

(Pergunta 2b da Prova de 6/7/71)

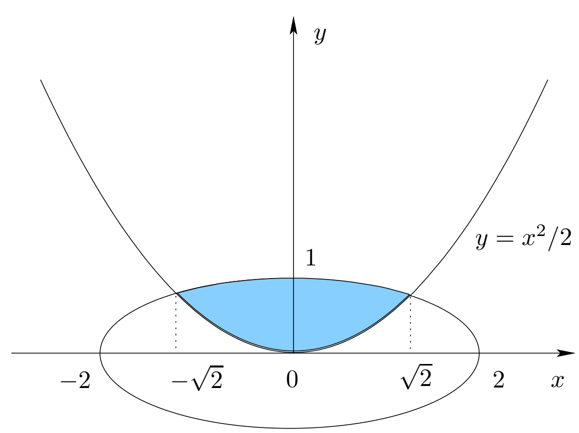

Figura 6.4: O conjunto no exercício 6.76.

Resolução: O conjunto referido é o que está colorido na figura 6.4. Os pontos de intersecção da parábola e da elipse têm por abcissa as soluções da equação $\frac{x^2}{2} = \sqrt{2(1-\frac{x^2}{4})}$ que são $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$.
A área pedida é pois

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Ora

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx = 2\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-y^2}\, dy = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, dt =$$
$$= \left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Logo

$$A = \sqrt{2}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{2}.$$

6.77 Determine a área do conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas verificam as condições: $y^2 - x^2 \geq a^2$ e $|y| \leq a\sqrt{2}$ com $a > 0$.

(Pergunta 3b da Prova de 19/7/71)

6.78 Determine a área do conjunto de todos os pontos (x, y) cujas coordenadas verificam as condições: $x^2 + y^2 \leq 10$ e $|x| + |y| \geq 4$.

(Pergunta 3b da Prova de 20/7/71)

6.79 Seja A o conjunto dos pontos $P(x, y)$ cujas coordenadas verificam as condições:

$$0 \leq y \leq \log x \quad \text{e} \quad x \leq a$$

(onde a designa um número real maior do que 1).

a) Calcule a área de A.

b) Calcule o comprimento da linha (formada por um arco de curva e dois segmentos de recta) que "limita" o conjunto A.

(Pergunta 1 da Prova de 4/9/72)

Resolução:

a) A área de A é dada por $\int_1^a \log x\, dx = [x \log x]|_1^a = a \log a$.

b) O comprimento do arco de curva é:

$$C = \int_1^a \sqrt{1 + ((\log x)')^2}\, dx = \int_1^a \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx =$$
$$= \int_1^a \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}\, dx = \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\, dx.$$

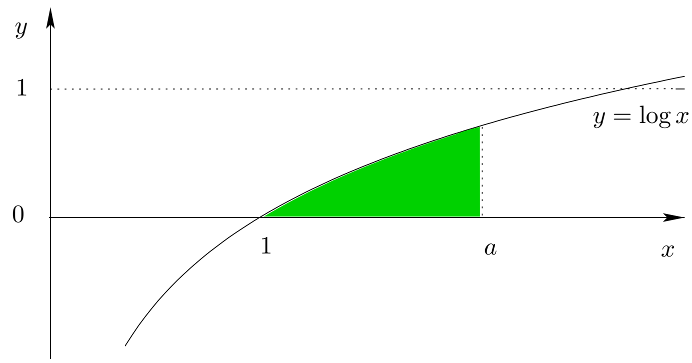

Figura 6.5: A região A no exercício 6.79.

A substituição $x = \sqrt{t^2-1}$ (que define uma aplicação bijectiva e diferenciável do intervalo $[\sqrt{2}, \sqrt{1+a^2}]$ no intervalo $[1, a]$) conduz a

$$\sqrt{1+x^2} = t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

e portanto

$$\begin{aligned} C &= \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right] dt = \left[t + \frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+a^2}} \\ &= \sqrt{1+a^2} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{\sqrt{1+a^2}+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}. \end{aligned}$$

Os dois segmentos têm comprimentos $a-1$ e $\log a$ pelo que o comprimento total da linha é:

$$(a-1) + \log a + C.$$

6.80 a) Calcule a área da região plana "limitada" pela curva de equação $y = \log x$ e pela recta que intersecta aquela curva nos pontos de abcissa 1 e e.

b) Calcule o comprimento da linha que "limita" essa região.

(Grupo III do 1º Teste de 20/7/78)

6.81 Seja A o conjunto dos pontos $P(x, y)$ cujas coordenadas verificam a condição:

$$x^2 \le y \le x + 2.$$

a) Calcule a área de A.

b) Calcule o comprimento da linha (formada por um segmento de recta e um arco de parábola) que "limita" o conjunto A.

(Pergunta 1 da Prova de 1/8/72)

6.82 Considere a região plana limitada pelas linhas de equação $y = x+1$ e $y = (x-1)^2$. Calcule:

a) a sua área;

b) o comprimento da linha que limita essa região.

(Pergunta 1b da Prova de 23/2/79)

6.83 Faça um esboço da região plana A definida por:

$$A = \big\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x^2 - 1 \leq y \leq \arccos x\big\}$$

e determine a sua área. Calcule o comprimento da linha que limita a região

$$B = A \cap \{(x, y) : y \leq 0\}.$$

(Grupo II da Prova de 22/9/78)

6.84 Faça um esboço da região plana definida por:

$$A = \big\{(x, y) : |\operatorname{sen} x| \leq y \leq \operatorname{ch}^2 x \ \wedge \ 0 \leq x \leq 2\pi\big\}$$

e determine a sua área. Calcule o comprimento da linha que "limita superiormente" a região A (de uma forma mais precisa, a linha definida pela equação $y = \operatorname{ch}^2 x$ com $x \in [0, 2\pi]$).

Nota — Na resolução desta questão poderão ser-lhe úteis as seguintes igualdades:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

(Grupo I da Prova de 9/10/78)

6.85 Determine o comprimento do gráfico das seguintes funções, entre os pontos considerados:

a) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^3}$ entre os pontos $x = 1$ e $x = 2$.

b) $y = \operatorname{ch} x$ entre os pontos de abcissas 0 e x.

(Grupo I2 da Prova de 2/12/76)

6.86 Calcule o comprimento do arco da curva de equação

$$y = \frac{x-3}{3}\sqrt{x}$$

compreendido entre os pontos de abcissas 0 e 1.

(Pergunta 1b do Ponto nº3 de 1/10/71)

6.87 Calcule o comprimento do arco de curva de equação

$$y = \frac{x-6}{3}\sqrt{\frac{x}{2}}$$

compreendido entre os pontos de abcissas 0 e 2.

(Pergunta 1b do Ponto nº4 de 1/10/71)

6.88 Calcule o comprimento do arco da curva de equação

$$y = \log(\cos x)$$

compreendido entre os pontos de abcissas 0 e $\frac{\pi}{3}$.

(Pergunta 2a da Prova de 11/10/72)

6.89 Calcule o comprimento do arco da curva de equação

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

compreendido entre os pontos de abcissas 0 e a.

(Pergunta 2c de uma Prova de Análise Matemática II)

6.90 Determine o comprimento do arco da curva de equação

$$y = \log \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

compreendido entre os pontos de abcissas a e b com $0 < a < b$.

(Grupo IIb do 2º Teste de 28/7/80)

Resolução: O comprimento é dado por:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1 + \left(\left(\log \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)'\right)^2}\, dx &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}\right)^2}\, dx \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}}\, dx \\
&= \int_a^b \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\, dx = \int_a^b \frac{2e^{2x} - (e^{2x} - 1)}{e^{2x} - 1}\, dx \\
&= \int_a^b -1 + \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1}\, dx = a - b + \log\left(\frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1}\right).
\end{aligned}$$

6.91 Seja g a função definida em $[0, 1]$ por $g(x) = x^2$. Calcule:

a) A área limitada pelo gráfico de g, pelo eixo dos xx e pelas rectas de equações $x = 0$ e $x = 1$.

b) O comprimento do gráfico de g.

c) O volume do sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de g em torno do eixo dos xx.

(Grupo II2 do Exame de 18/7/77)

Resolução:

a) Como $x^2 \geq 0$

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}\, x^3\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

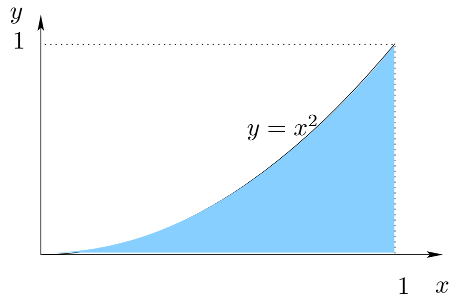

Figura 6.6: A região no exercício 6.91

b) O comprimento será dado por (note a mudança de variável $2x = \operatorname{sh} y$):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx \\ &= \int_0^{\operatorname{argsh} 2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}\,\frac{1}{2}\operatorname{ch} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsh} 2} \operatorname{ch}^2 y\,dy \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{argsh} 2} (1+\operatorname{ch} 2y)\,dy = \frac{1}{8}\,(2y+\operatorname{sh} 2y)\Big|_{y=0}^{y=\operatorname{argsh} 2} \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{argsh} 2 + \frac{1}{8} 2\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} 2)\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} 2) = \frac{1}{4}\operatorname{argsh} 2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

c) O volume será $\pi \int_0^1 g(x)^2\,dx = \pi \int_0^1 x^4\,dx = \pi\ \frac{1}{5}x^5\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{5}$.

6.92 Seja φ a função definida em $\mathbb{R}$ por: $\varphi(x) = \frac{1}{1+|x|}$.

a) Indique o domínio de diferenciabilidade de φ e faça um esboço do seu gráfico.

b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos xx do gráfico da restrição da função φ ao intervalo $[-1, 1]$.

(Grupo IVa e c do Exame de 23/3/1977)