Análise Matemática II

1º exame

26 de Junho de 2001

Licenciaturas em Engenharia Química,
Química e Engenharia Biológica

Este documento contém o enunciado e algumas soluções dos problemas do 1º exame de Análise Matemática II de Química, Engenharia Química e Engenharia Biológica do 2º semestre de 2000/2001.

Comentários e soluções são apresentados na esperança de que alguém aprenda alguma coisa com eles. Alunos que tenham simplesmente expectivas de que basta saber resolver este exame para saber resolver o próximo são aconselhados a desistir de ler este documento a não ser que percebam o alcance dos comentários imediatamente abaixo e tentem ver para além dos detalhes da solução.

Nas respostas dos alunos ao 1º exame notam-se várias tendências preocupantes:

- A suposição de que o cálculo de um integral passa necessariamente pelo cálculo de uma primitiva (ver pergunta I.2. e a solução apresentada; para se convencer totalmente tente resolver a pergunta substituindo t^7 por t^{777}).

- A suposição de que a obtenção de um desenvolvimento em série de Taylor só é possível calculando uma fórmula para a derivada de ordem n da função, substituição das derivadas no ponto em torno do qual se faz o desenvolvimento e estudo do resto para provar que de facto a série representa a função num certo intervalo. De facto, mesmo para funções elementares, o procedimento anterior pode ser extremamente moroso e pejado de dificuldades. Como é explicado na *Introdução à Análise Matemática* (p. 425 e seguintes) e no curso na aula teórica e em problemas a manipulação de séries conhecidas é muitas vezes a opção correcta em termos de facilidade de raciocínio e rapidez. Ver a pergunta I.5 e a sua solução.

- A suposição que se pode diferenciar termo a termo uma série de funções sem condições suplementares. Ver a pergunta II.2 e a sua solução.

As duas páginas seguintes contêm o enunciado com três gralhas relativamente inócuas corrigidas. As restantes contêm algumas soluções.

Análise Matemática II

1º exame

26 de Junho de 2001

Licenciaturas em Engenharia Química, Química e Engenharia Biológica

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(11,0) **I.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{1+\sec^2 x}{x+\operatorname{tg} x}, \quad \text{b)}\ \frac{x}{\cos^2 x}, \quad \text{c)}\ \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}.$$

2. Calcule o integral

$$\int_{-1}^{1} t^7 \cos(t^2)\, dt.$$

3. Calcule a área da região do plano definida por

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2|x| \leq y \leq 1+x^2, y \leq x+1\}.$$

4. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Determine o domínio de diferenciabilidade desta função e o valor do seu gradiente.

   b) Para cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ determine as direcções (h,k) que tornam a derivada dirigida $D_{(h,k)}f(x,y)$ nula.

5. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (x+1)\log(x^2+2x+2)$. Determine a respectiva série de Taylor em potências de $x+1$ e o maior intervalo aberto em que a série representa a função.

(6,0) **II.** 1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que o determinante da sua matriz jacobiana satisfaz $\det J_F(u,v) = e^u$ para todo o $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(x,y) = (x^2-y^2, x^2y^2)$. Considere $\varphi = F \circ \psi$. Calcule o determinante da matriz jacobiana de φ num ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ uma série convergente de termos não negativos. Mostre que uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k^2} e^{-kx} \operatorname{sen} ky$$

satisfaz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{para } x > 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}.$$

3. Considere $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$.
   a) Determine os pontos de estacionaridade de h.
   b) Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimo local de h.
   c) Mostre que h não possui pontos de máximo absoluto e determine o(s) ponto(s) de mínimo absoluto.
   d) Determine os pontos de extremo absoluto da restrição de h à bola fechada de raio 2 centrada em $(0,0)$ [**Sugestão**: parametrize a fronteira da bola usando coordenadas polares e note que $x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$.].

(3,0) **III.** 1. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, não-negativa e limitada em $]0,+\infty[$ e uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua e definida por

$$\phi(x,y) = \int_{(x^4+y^4)^{1/4}}^{(x^2+y^2)^{1/2}} f(t)\,dt, \qquad \text{para } (x,y) \neq (0,0).$$

   a) Calcule $\phi(0,0)$.
   b) Determine $\nabla\phi(x,y)$ em termos de f para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   c) Mostre que se $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ então ϕ é diferenciável em $(0,0)$ mas que, em geral, isso não é verdade.
   d) Mostre que se $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda f(\lambda) = 0$ então ϕ possui pontos de máximo absoluto mas que, em geral, isso não é verdade.
   e) Mostre que o contradomínio de ϕ é um intervalo da forma $[0,C]$, $[0,C[$ ou $[0,+\infty[$ com $C > 0$.

Algumas soluções

I. 1. a)

b)

c)

2. Seja $f(t) = t^7 \cos(t^2)$. Note que $f(-t) = -f(t)$, isto é f é uma função ímpar (e é contínua em $\mathbb{R}$ o que garante a existência do integral). Como o intervalo de integração é simétrico em relação a 0 suspeitamos que o integral valerá necessariamente 0. Para justificar cabalmente esta afirmação usamos uma mudança de variável $u = -t$ no intervalo $[-1, 0]$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} f(t)\,dt &= \int_{1}^{0} f(-u)(-1)\,du = -\int_{0}^{1} f(u)\,du,\\ \int_{-1}^{1} f(t)\,dt &= \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt\\ &\quad -\int_{0}^{1} f(u)\,du + \int_{0}^{1} f(t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

[**Nota**: Claro que esta pergunta pode ser resolvida determinando uma primitiva usando primitivação por partes mas isso é extremamente moroso e passível de erros.]

3.

4. a) Consideremos $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é analítica (em particular C^∞) em $\mathbb{R}$ (recorde a definição do sen via série de potências,...)

$$\Lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}.$$

Este desenvolvimento em série torna óbvio que $\Lambda'(0) = 0$.
A função f nesta alínea pode ser representada pela composição $f(x, y) = \Lambda(x^2 + y^2)$. Como a aplicação $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ também é C^∞ segue do teorema de derivação da função composta que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e em particular o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R}^2$. Além disso o mesmo teorema permite escrever

$$\nabla f(x, y) = \Lambda'(x^2 + y^2)(2x, 2y)$$

em que

$$\Lambda'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2n+1} = \begin{cases} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

b) Da expressão do gradiente $\nabla f(x,y)$ na alínea anterior e do facto da derivada dirigida verificar, para funções diferenciáveis,

$$D_{(h,k)} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot (h,k)$$

segue que qualquer derivada dirigida anula-se em pontos (x,y) que verifiquem $\Lambda'(x^2+y^2)=0$ e noutros pontos sempre que os vectores (h,k) forem ortogonais ao vector (x,y), isto é, $xh+yk=0$.

[**Nota**: A solução apresentada tem a vantagem de evitar um tratamento especial do ponto $(0,0)$. Relembre que o gradiente é ortogonal às linhas de nível e que linhas de nível óbvias são as circunferências centradas em $(0,0)$.]

5. Temos $g(x) = (x+1)\log((x+1)^2+1)$ pelo que bastará obter uma representação em série de MacLaurin de $y\log(y^2+1)$ e substituir y por $x+1$. Para obter esta bastará obter uma representação em série de MacLaurin de $\log(t+1)$, substituir t por y^2 e multiplicar por y. Finalmente como $\frac{d}{dx}(\log(t+1)) = \frac{1}{t+1}$ bastará começar com o desenvolvimento em série de MacLaurin de $\frac{1}{t+1}$. Este obtém-se com facilidade através da soma da série geométrica.

Seguindo os passos descritos atrás obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, \quad \text{para } |t|<1, \\ \log(t+1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1}, \quad \text{válido para } |t|<1, \\ y\log(y^2+1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+3}}{k+1}, \quad \text{válido para } |y|<1, \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x+1)^{2k+3}}{k+1}, \quad \text{válido para } |x+1|<1. \end{aligned}$$

Note-se que a primeira passagem exige a verificação da constante de primitivação. Este processo garante que a última série converge e representa g no intervalo $]-2,0[$ e é fácil de verificar que se convergisse num intervalo aberto maior o mesmo teria que se passar para a série geométrica pelo que o maior intervalo em que a série representa a função é de facto $]-2,0[$.

1.

2. Se supusermos que podemos permutar as derivações parciais com a série o resultado segue de, para cada termo da série,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{a_k}{k^2}e^{-kx}\operatorname{sen}(ky)\right) = a_k e^{-kx}\operatorname{sen}(ky),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{a_k}{k^2}e^{-kx}\operatorname{sen}(ky)\right) = -a_k e^{-kx}\operatorname{sen}(ky).$$

Como $|\frac{a_k}{k^p}e^{-kx}\operatorname{sen}(ky)| \leq a_k$ e $|\frac{a_k}{k^p}e^{-kx}\cos(ky)| \leq a_k$ para $p = 0, 1, 2$ e $x > 0$ e a série $\sum a_k$ é convergente, todas as séries que se obtêm por derivação termo a termo da série original (e a série original) são absoluta e uniformemente convergentes pelo critério de Weierstrass, o que legitima a permuta da série com os operadores de derivação.

Nota: A convergência uniforme da série original *não* é suficiente para justificar o cálculo.