Capítulo 7

Introdução à Análise em $\mathbb{R}^n$

7.1 Topologia e sucessões

7.1 Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x, y) : xy > 1\}$.

1. Indique um ponto interior, um ponto fronteiro e um ponto exterior ao conjunto D e diga se D é aberto, fechado, limitado, conexo. Justifique abreviadamente as respostas.

2. Dê um exemplo de uma sucessão de termos em D que convirja para um ponto não pertencente a D. Seria possível dar um exemplo de uma sucessão cujos termos não pertencessem a D e que convergisse para um ponto deste conjunto? Porquê?

(Grupo Ia do 2º Teste de 30/7/79)

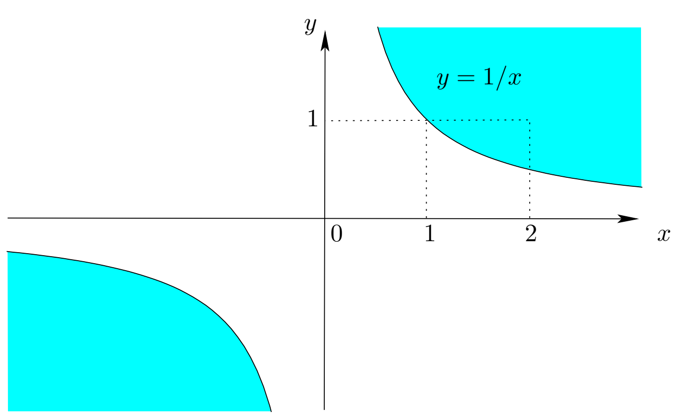

Figura 7.1: O conjunto D no exercício 7.1.

Resolução:

1. O conjunto D é fácil de conceber graficamente: é a região colorida na figura 7.1, não incluindo os ramos de hipérbole. Um ponto interior: $(2,1)$; um ponto fronteiro: $(1,1)$; um ponto exterior: $(0,0)$. D é aberto, pois dado $a \in D$ sempre existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset D$. D não é fechado pois $(1,1) \in \overline{D} \setminus D$. D não é limitado pois não existe nenhuma bola que contenha D, pois, por exemplo, $(\lambda, \lambda) \in D$ para qualquer $\lambda \geq 1$. D não é conexo pois pode exprimir-se como a união de dois conjuntos separados, concretamente $D = D_+ \cup D_-$ com

$$\begin{aligned} D_+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, x > 0\}, \\ D_- &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, x < 0\}, \\ \overline{D_+} \cap D_- &= \emptyset, \qquad \overline{D_-} \cap D_+ = \emptyset. \end{aligned}$$

2. $(x_n) = ((1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}))$ é uma sucessão de elementos de D que converge para $(1,1) \notin D$.

   Não é possível obter uma sucessão de termos em $\mathbb{R}^2 \setminus D$ que convirja para um ponto de D, pois $\mathbb{R}^2 \setminus D$ é fechado, logo o limite de qualquer sucessão convergente de termos em $\mathbb{R}^2 \setminus D$ estará necessariamente em $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

7.2 Sejam u_n e v_n os termos gerais de duas sucessões de termos em $\mathbb{R}^p$ e suponha que u_n converge para o vector nulo e que v_n é limitada. Nestas condições, prove que a sucessão real $u_n \cdot v_n$ (produto interno de u_n por v_n) converge para 0.

(Grupo IV do 2^o Teste de 11/9/79)

7.3 Sendo A o conjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$A = \big\{(x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\big\}$$

mostre que qualquer sucessão convergente a_n de termos em A tem como limite um elemento de A.

(Grupo IIIb do Exame de 2^a época de 11/2/80)

7.4 Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$ e suponha-se que A é fechado.

1. Mostre que, se existir $x \in \mathbb{R}^n$, uma sucessão x_m de termos de A e uma sucessão y_m de termos de B tais que $x_m \to x$ e $y_m \to x$, então A e B não são separados.
2. Mostre por meio de um exemplo que a proposição anterior seria falsa se omitissemos a hipótese de A ser fechado.

(Grupo IVa do Exame Final de 25/9/79)

Resolução:

1. Com efeito, tem-se $x \in \overline{A} = A$ (A é fechado) e, por outro lado, $x \in \overline{B}$, logo $x \in A \cap \overline{B}$ donde A e B não são separados.
2. Basta considerar $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ e $x_m = (-\frac{1}{m}, 0)$, $y_m = (\frac{1}{m}, 0)$ pois $x_m \to (0,0)$ e $y_m \to (0,0)$. A e B são porém separados.

7.5 Sejam x_n e v_n os termos gerais de duas sucessões em $\mathbb{R}^p$ e admita que x_n converge para z e que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$. Nestas condições:

1. Justifique que y_n converge para z.
2. Supondo que $A \subset \mathbb{R}^p$ é tal que $x_n \in A$ e $y_n \notin A$ (qualquer que seja n), justifique que z é um ponto fronteiro do conjunto A.

(Grupo IVa do Exame Final de 18/9/79)

7.6 1. Sejam A e B dois subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ verificando a condição seguinte: *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_1$ existem pontos $x_n \in A$ e $y_n \in B$ tais que* $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$. Prove que se um dos conjuntos A ou B for limitado, então $A \cap B \neq \emptyset$.

2. Dê um exemplo (em $\mathbb{R}^2$, se preferir) de conjuntos A, B fechados, disjuntos e tais que para todo o $\varepsilon > 0$ existam pontos $x \in A$ e $y \in B$ verificando a condição $\|x - y\| < \varepsilon$.

(Grupo IIIb do 2º Teste de 30/7/79)

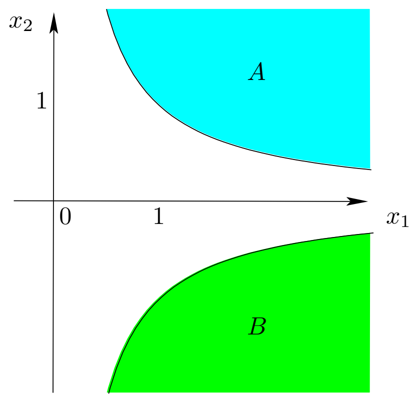

Figura 7.2: Possíveis conjuntos A e B na solução da alínea (b) do exercício 7.6.

Resolução:

1. Suponhamos que A é limitado; então A é um conjunto limitado e fechado pelo que é possível extrair de (x_n) uma subsucessão convergente para certo $x \in A$. Seja (x_{n_r}) uma tal subsucessão e provemos que (y_n) também admite uma subsucessão convergente para x. Com efeito, estimando a distância de y_{n_r} a x:
$$\begin{aligned}\|y_{n_r} - x\| &= \|y_{n_r} - x_{n_r} + x_{n_r} - x\| \leq \|y_{n_r} - x_{n_r}\| + \|x_{n_r} - x\| \\ &\leq \frac{1}{n_r} + \|x_{n_r} - x\| \longrightarrow 0, \qquad \text{logo } y_{n_r} \to x.\end{aligned}$$
Como A e B são fechados, tem-se $x \in A \cap B$.

2. Basta considerar
$$\begin{aligned}A &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_1 x_2 \geq 1\}, \\ B &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_1 x_2 \leq -1\}.\end{aligned}$$
Com efeito, como $\lim_{x_1 \to +\infty} \frac{1}{x_1} = 0$, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $x_1 > \frac{1}{\varepsilon}$ para que se tenha:
$$\|(x_1, 1/x_1) - (x_1, -1/x_1)\| = \|(0, 2/x_1)\| = \frac{2}{|x_1|} < 2\varepsilon$$
e $(x_1, 1/x_1) \in A$, $(x_1, -1/x_1) \in B$.

7.2 Continuidade e limites

7.7 Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujas funções coordenadas, g_1 e g_2, são definidas pelo sistema:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= \sqrt{1-x^2-y^2} \\ g_2(x,y) &= \log|y-x^2| \end{aligned}$$

e designe por D o seu domínio. Represente geometricamente o conjunto D, determine o seu interior e a sua fronteira e indique, justificando, se D é aberto, fechado, limitado, conexo.

(Grupo IIb do Exame Final de 18/9/79)

7.8 Sendo g uma aplicação de A em B e C um subconjunto de B; designa-se correntemente por $g^{-1}(C)$ o conjunto de todos os elementos $x \in A$ tais que $g(x) \in C$.

Considere uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um conjunto $C \subset \mathbb{R}^m$ e prove que:

1. Se C é aberto, $f^{-1}(C)$ é aberto.
2. Se C é fechado, $f^{-1}(C)$ é fechado.

Mostre ainda que, sendo C conexo e limitado, $f^{-1}(C)$ pode ser desconexo e ilimitado.

(Grupo IVb do 2º Teste de 11/9/79)

7.9 Considere a função f definida pela fórmula

$$f(x,y) = \sqrt{-y^2 + \operatorname{sen}^2 x}$$

e designe por D o seu domínio.

a) Interprete geometricamente o conjunto D e determine a sua fronteira e o seu interior.

b) Justificando abreviadamente as respostas, indique se D é aberto, fechado, limitado. O interior de D é conexo? Porquê?

c) Estude a função f, do ponto de vista da continuidade. Justifique que, em qualquer ponto $(x,y) \in D$, se verificam as desigualdades: $0 \le f(x,y) \le 1$ e ainda que, qualquer que seja a sucessão (x_n, y_n) de pontos de D, a sucessão real $f(x_n, y_n)$ tem subsucessões convergentes.

(Grupo III do 2º Teste de 11/9/79)

Resolução:

a) A função está definida se e só se o argumento da raiz quadrada for não negativo, isto é,

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -y^2 + \operatorname{sen}^2 x \ge 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \le \operatorname{sen}^2 x\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le |\operatorname{sen} x|\right\}. \end{aligned}$$

O conjunto D corresponde à região colorida na figura 7.3. Designando por ∂D a sua fronteira e $\operatorname{int} D$ o seu interior temos:

$$\begin{aligned} \partial D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen} x \text{ ou } y = -\operatorname{sen} x\right\}, \\ \operatorname{int} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |\operatorname{sen} x|\right\}. \end{aligned}$$

b) D não é aberto pois contém pontos, por exemplo $(0,0)$, que não são centro de nenhuma bola contida em D; D é fechado pois contém todos os seus pontos fronteiros; D não é limitado pois não existe $r > 0$ tal que $B_r(0)$ tal que $D \subset B_r(0)$; $\operatorname{int} D$ não é conexo pois, por exemplo, $\operatorname{int} D = A \cup B$ com $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } |y| < |\operatorname{sen} x|\right\}$ e $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ e } |y| < |\operatorname{sen} x|\right\}$ que são dois conjuntos separados.

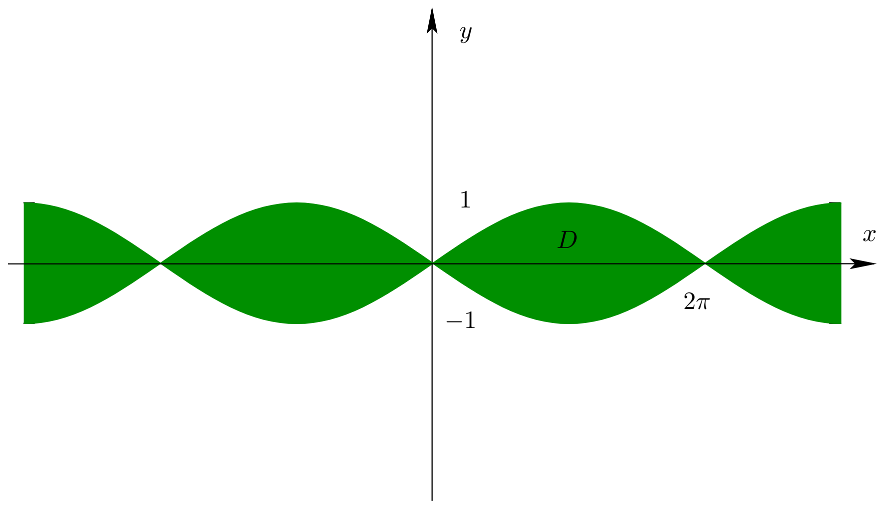

Figura 7.3: O domínio D da função f no exercício 7.9.

c) f é contínua em D pois é uma composição de funções contínuas:

$$D \xrightarrow[(x,y)\mapsto -y^2+\operatorname{sen}^2 x]{g} \mathbb{R}^+ \xrightarrow[u\mapsto\sqrt{u}]{\varphi} \mathbb{R}, \quad f=\varphi\circ g.$$

Se $(x,y)\in D$ tem-se $\operatorname{sen}^2 x \geq y^2$ e como $1\geq \operatorname{sen}^2 x\geq y^2$ vem $1\geq \operatorname{sen}^2 x \geq \operatorname{sen}^2 x - y^2 \geq 0$; como $0\leq -y^2+\operatorname{sen}^2 x\leq 1$, também $f(x,y)=\sqrt{-y^2+\operatorname{sen}^2 x}$ verifica $0\leq f(x,y)\leq 1$ pelo que a sucessão $(f(x_n,y_n))$ tem termos em $[0,1]$, logo, do *teorema de Bolzano-Weierstrass* tem uma subsucessão convergente.

7.10 Prove que :

a) Se K é um conjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}^n$, para cada função f, contínua em K e tal que $f>0$, existe $\alpha>0$ tal que $f(x)>\alpha$, $\forall_{x\in K}$.

b) Se $K\subset\mathbb{R}^n$ não for limitado ou não for fechado, existem funções contínuas e positivas em K, para as quais a propriedade anterior não é válida.

(Grupo III do 2º Teste de 15/9/78)

Resolução:

a) Se K é compacto e a função real f é contínua em K segue do *teorema de Weierstrass* que o conjunto $f(K)$ é compacto. Em particular, $f(K)\neq\emptyset$ é limitado logo tem ínfimo finito e, como é fechado, esse ínfimo é o mínimo. Se o designarmos por β e escolhermos α com $\beta>\alpha>0$ obtemos o resultado.

b) Seja $K_1=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \|x\|\leq 1, x_1>0\}$ e $f(x)=\|x\|$, $\forall x\in K_1$. A função f é contínua e positiva. O conjunto K_1 é limitado mas não é fechado e $f(\epsilon,0,\dots,0)=|\epsilon|\to 0$ quando $\epsilon\to 0$.

Seja agora $K_2=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1\geq 1\}$ e $g(x)=\frac{1}{\|x\|}$, $\forall x\in K_2$. A função g também é contínua e positiva. O conjunto K_2 não é limitado mas é fechado e $g(1/\epsilon,0,\dots,0)=|\epsilon|\to 0$ quando $\epsilon\to 0$.

7.11 Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$; chama-se *distância do ponto b ao conjunto A* — designada por $d(b, A)$ — ao ínfimo do conjunto formado pelas distâncias de b a todos os pontos de A:

$$d(b, A) = \inf \{\|x - b\| : x \in A\}.$$

Tendo em conta esta definição:

a) Justifique que, se $b \in A$, $d(b, A) = 0$ e mostre por meio de um exemplo (que poderá ser dado em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, se o preferir) que pode ter-se $d(b, A) = 0$ sem que seja $b \in A$.

b) Prove que se A é fechado e se $d(b, A) = 0$ então $b \in A$.

c) Justifique que, se A é não vazio, limitado e fechado existe um ponto $a \in A$ tal que $d(b, A) = \|a - b\|$. [**Sugestão**: tenha em conta a continuidade da aplicação $x \to \|x - b\|$].

d) Prove que o resultado da alínea anterior é ainda verdadeiro, supondo apenas que A é fechado e não vazio.

7.12 Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ pela fórmula

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ a + e^{-\frac{1}{|x^2+y^2-1|}}, & \text{se } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Determine o número real a por forma a que f fique contínua em $\mathbb{R}^2$.

(Grupo IIIa do Exame Final de 25/9/79)

Resolução: Seja $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ um ponto verificando $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1$. Como se tem imediatamente

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y}) \\ x^2+y^2\leq 1}} f(x, y) = 3$$

há que determinar a por forma a que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y}) \\ x^2+y^2>1}} f(x, y)$$

também seja igual a 3. Ora

$$\lim_{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})} x^2 + y^2 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})} e^{-\frac{1}{|x^2+y^2-1|}} = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y}) \\ x^2+y^2>1}} f(x, y) = a + \lim_{\substack{u\to 0 \\ u>0}} e^{-\frac{1}{u}} = a,$$

pelo que deve ser $a = 3$.

7.13 Seja f a função definida pela fórmula:

$$f(x, y) = x \log(xy)$$

a) Indique o domínio D de f, interprete-o geometricamente e determine o seu interior, o seu exterior e a sua fronteira; indique, justificando se D é

1º) aberto 2º) fechado 3º) limitado 4º) conexo.

b) A função f é contínua em todo o seu domínio? Justifique.

c) Mostre que, sendo S uma semirecta com origem no ponto $(0,0)$ e contida no domínio D de f, o limite de f na origem relativo ao conjunto S,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y)$$

toma o mesmo valor para toda a semirecta nas condições indicadas.

d) Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. [**Sugestão**: pesquise o limite relativo ao subconjunto de D formado pelos pontos que pertencem à linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$].

7.14 Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^2}$.

(Grupo I2 da Prova de 17/10/77)

Resolução: Basta encontrar duas curvas Γ_1, Γ_2 passando por $(0,0)$ de forma a que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_1}} \frac{xy}{x^3+y^2} \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_2}} \frac{xy}{x^3+y^2}.$$

Com $\Gamma_1 = \{(x,y) : y = x\}$ e $\Gamma_2 = \{(x,y) : y = -x\}$ obtém-se:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_1}} \frac{xy}{x^3+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3+x^2} = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_2}} \frac{xy}{x^3+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^3+x^2} = -1.$$

7.15 Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1/\sqrt{xy-1}$ onde $D = \{(x,y) : xy > 1\}$.

1. Indique, justificando, os pontos em que f é contínua.
2. Existirá algum ponto fronteiro ao conjunto D ao qual f possa prolongar-se por continuidade? Porquê?
3. Indique, justificando, o contradomínio de f.

(Grupo Ib do 2º Teste de 30/7/79)

7.16 Considere uma aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Mostre que se existirem números reais positivos c, p, ε tais que:

$$x \in B_\varepsilon(a) \cap D \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq c\|x-a\|^p$$

então a aplicação f é contínua em a.

7.17 Considerando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (\log|x|)^{-1}, & \text{se } 0 < x < 1,\\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

prove que a condição do problema anterior não é necessária para continuidade num ponto.

7.18 Estude quanto a continuidade a função f de $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2+y^2 < 2y, \\ |x|, & \text{se } x^2+y^2 = 2y, \\ y^2, & \text{se } x^2+y^2 > 2y. \end{cases}$$

(Prova de Análise Matemática III de 27/4/81)

7.19 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(0,0) = 0$$
$$f(x,y) = \frac{y - 2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0)$$

a) Prove que esta função não é contínua em $(0,0)$.

b) Considere a restrição desta função ao conjunto $D = \{(x,y) : \ |y| \leq x^2\}$. Prove que esta restrição de f é contínua em $(0,0)$.

c) Verifique que a conclusão da alínea anterior não seria válida se, em vez da restrição a D, considerássemos a restrição a $D_k = \{(x,y) : |y| \leq \frac{|x|}{k}\} \quad (k \in \mathbb{R}^+)$.

7.3 Diferenciabilidade

7.20 Seja f a função definida pela expressão $f(x,y) = \sqrt{x/(x+y)}$.

a) Determine o domínio D de f e interprete-o geometricamente.

b) Indique o interior, exterior e fronteira de D. Será D aberto? E fechado?

c) Justifique que D não é limitado nem conexo.

d) Dê um exemplo de uma sucessão de elementos de D que convirja para um ponto não pertencente a D.

e) Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,0)$ sendo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(Grupo I1 da Prova de 15/9/78)

7.21 Considere uma função real f, definida em $\mathbb{R}^2$ e tal que, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = 1 + xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

1. Se f for contínua na origem, qual será o valor de $f(0,0)$? Justifique.
2. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)$, onde a é um número real (para o caso $a = 0$, suponha $f(0,0) = 1$).

(Grupo IIIa do Exame Final de 18/9/79)

7.22 Determine o domínio e calcule as derivadas parciais de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)} \quad f(x,y) = \frac{x \operatorname{sh} y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \text{b)} \quad g(x,y) = \int_1^{x^2 y} e^{-t^2}\, dt.$$

(Grupo I1 da Prova de 17/10/77)