Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II - 1º Semestre 2001/2002
2º Teste / 1º Exame - 11 de Janeiro de 2001 - 9 h

Todos os cursos excepto Eng. Civil, de Território, Física Tecnológica e Lic. Matemática

Solução

1.a) Fazendo $y = 2^x$ obtêm-se $dy = \log 2 \; 2^x \, dx$, logo

$$\int 2^{x+2^x} \; dx = \frac{1}{\log 2} \int 2^y \; dy = \frac{1}{(\log 2)^2} \; 2^y + C = \frac{1}{(\log 2)^2} \; 2^{x+2^x} + C$$

1.b) Fazendo $x = \sin y$ obtêm-se $dx = \cos y \, dy$, logo

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = \int \frac{\sin^3 y}{\cos y} \; \cos y \; dy = \int \sin y (1 - \cos^2 y) \; dy =$$
$$= -\cos y + \frac{1}{3} \cos^3 y + C = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + C$$

Ou, calculando a mesma primitiva por partes obtêm-se:

$$\int x^2 \, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx = -x^2 \sqrt{1-x^2} + \int 2x \sqrt{1-x^2} \; dx = -x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} + C$$

onde usámos $f(x) = x^2, \; f'(x) = 2x$ e $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \; g(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

2. Fazendo a substituição $y = e^x$ obtemos

$$\int_0^1 \frac{e^{3x} + e^{2x} - 3e^x}{(e^x+1)(e^{2x}+2)} \; dx = \int_1^e \frac{y^2 + y - 3}{(y+1)(y^2+2)} \; dy$$

A função integranda agora é uma função racional, logo pode-se escrever como

$$\frac{y^2 + y - 3}{(y+1)(y^2+2)} = \frac{A}{y+1} + \frac{By + C}{y^2+2}$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados temos

$$Ay^2 + 2A + By^2 + By + Cy + C = y^2 + y - 3$$

e resolvendo o sistema obtemos

$$
\begin{array}{llllll}
y^2: & A & +B & & = 1 & A = -1 \\
y^1: & & B & +C & = 1 & B = 2 \\
y^0: & 2A & & +C & = -3 & C = -1
\end{array}
$$

Finalmente substituindo as constantes na função integranda e aplicando a Regra de Barrow conclui-se que

$$
\int_1^e \left(-\frac{1}{y+1} + \frac{2y-1}{y^2+2}\right) dy = \left[-\log|y+1| + \log(y^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{y}{\sqrt{2}}\right]_1^e =
$$

$$
= -\log|e+1| + \log(e^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{e}{\sqrt{2}} + \log 2 - \log 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}
$$

3. A região é delimitada por cima pelo gráfico do $\arctan x$ e por baixo pela parábola $\frac{\pi}{4}x^2$. Os pontos de intersecção das duas curvas são $(0,0)$ e $(1, \frac{\pi}{4})$. Assim a área é dada por

$$
A = \int_0^1 (\arctan x - \frac{\pi}{4}x^2)\ dx
$$

Temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan x\ dx &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\log(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}
$$

e

$$
\int_0^1 \frac{\pi}{4}x^2\ dx = \frac{\pi}{12}\left[x^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}
$$

Portanto a área é igual a

$$
A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\log 2
$$

4. A integranda do 1º membro é um produto de funções contínuas, portanto contínua. Pelo Teorema Fundamental de Cálculo o 1º membro é diferenciável e derivando ambos os membros obtêm-se:

$$
xf(x) = \cos x - \cos x + x\sin x - x = x\sin x - x
$$

Logo, para $x \neq 0$ temos $f(x) = \sin x - 1$. Usando a continuidade de f podemos concluir que

$$
f(x) = \sin x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}
$$

Para determinar o valor de k voltamos ao integral inicial

$$\int_k^x t(\sin t - 1)\ dt = \sin x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2 \ \Rightarrow$$

$$\left[\sin t - t\cos t - \frac{1}{2}t^2\right]_k^x = \sin x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2 \ \Rightarrow$$

$$\sin k - k\cos k - \frac{1}{2}k^2 = 0 \ \Rightarrow k = 0 \text{ é uma solução}$$

5. O conjunto D é o rectângulo aberto delimitado pelas rectas $x = \pm 2$, $y = \pm 1$, excluindo os pontos nas duas diagonais. O conjunto dos seus pontos fronteiros é constituido pelos quatro segmentos que constituem a fronteira do rectângulo e os pontos nas duas diagonais.

a) D é aberto, porque $D = \operatorname{int} D$. b) D não é fechado, porque os pontos fronteiro de D não pertencem a D. c) D é limitado, porque D está contido na bola centrada na origem de raio 3, por exemplo. d) D é desconexo porque D é a reunião de dois conjuntos A e B separados (por exemplo A a metade por cima do diagonal $x = 2y$, e B a metade por baixo).

6.a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe porque

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0 \neq -1/2 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y)$$

ou seja, dois limites da função f na origem relativos a subconjuntos diferentes são diferentes.

$$|g(x,y) - 0| = \left|\frac{5x^2\sin(\pi y/8)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{5x^2\pi y/8}{x^2+y^2}\right| \le 5\pi r/8,$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$, e

$$\lim_{r\to 0} 5\pi r/8 = 0$$

Portanto, aplicando um critério para a existência do limite,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0.$$

6.b)

$$\nabla\tilde{f}(x,y) = \left(\partial\tilde{f}/\partial x(x,y),\ \partial\tilde{f}/\partial x(x,y)\right).$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}\partial\tilde{f}/\partial x(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(x^2-y+2x^2) - x(x^2-y).2x}{(x^2+y^2)^2}\\ \partial\tilde{f}/\partial y(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)(-x) - x(x^2-y).2y}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Para $(x,y)=(0,0)$

$$\begin{aligned}\partial\tilde{f}/\partial x(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{f}(t,0)-\tilde{f}(0,0)}{t}=1\\ \partial\tilde{f}/\partial y(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{f}(0,t)-\tilde{f}(0,0)}{t}=0.\end{aligned}$$

$\tilde{f}$ é diferenciável para $(x,y)\neq(0,0)$ porque é obtida a partir de funções diferenciáveis por adição, multiplicação e divisão (ou porque é uma função racional). $\tilde{f}$ não é diferenciável no ponto $(0,0)$, porque (usando 6a), não é contínua em $(0,0)$. Portanto o domínio de diferenciabilidade de $\tilde{f}$ é $\mathbf{R}^2\setminus(0,0)$.

6.c) Usando a diferenciabilidade de g no seu domínio,

$$D_v g(2,4)=\nabla g(2,4)\cdot(1,1)=\partial g/\partial x(2,4)+\partial g/\partial y(2,4).$$

Calcule-se primeiro as derivadas parciais de g:

$$\begin{aligned}\partial g/\partial x(x,y) &= \frac{(x^2+y^2).10x.\sin(\pi y/8)-5x^2.\sin(\pi y/8).2x}{(x^2+y^2)^2}\\ \partial g/\partial y(x,y) &= \frac{(x^2+y^2).5x^2.\cos(\pi y/8).\pi/8-5x^2.\sin(\pi y/8).2y}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$\partial g/\partial x(2,4)=4/5,\qquad \partial g/\partial y(2,4)=-2/5,$$

e assim:

$$D_v g(2,4)=4/5-2/5=2/5.$$

6.d) Pelas alíneas anteriores a matriz Jacobeana de h no ponto $(2,4)$ é

$$J_h(2,4)=\begin{bmatrix}\partial f/\partial x(2,4) & \partial f/\partial y(2,4)\\ \partial g/\partial x(2,4) & \partial g/\partial y(2,4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/5 & -1/10\\ 4/5 & -2/5\end{bmatrix}$$

A função h é diferenciável no ponto $(2,4)$ e no ponto $h(2,4)=(0,1)$, porque as funções coordenadas f e g são diferenciáveis nos mesmos pontos. Pelo teorema da derivação da função composta, a matriz Jacobeana de $h\circ h$ no ponto $(2,4)$ é dada por

$$\begin{aligned}J_{h\circ h}(2,4) &= J_h(h(2,4))\,J_h(2,4)\\ &= J_h(0,1)\,J_h(2,4)\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/5 & -1/10\\ 4/5 & -2/5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-2/5 & 1/10\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

7. Seja $\phi : X \to \mathbf{R}$ a função definida por:

$$\phi(x) = \|x - u\|$$

A função ϕ é obviamente contínua em X, e segundo o enunciado X é compacto. Aplicando o teorema de Weierstrass "uma função real f contínua num domínio compacto D tem máximo e mínimo em D", pode-se concluir: ϕ tem máximo em X, que é uma afirmação equivalente áquela que queríamos demonstrar.