Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II - 1º Semestre 2001/2002
2º Exame - 25 de Janeiro de 2001 - 9 h

Todos os cursos excepto Eng. Civil, de Território, Física Tecnológica e Lic. Matemática

Solução

1.(a)

$$\begin{array}{rclcll} F(x) & = & \frac{1}{3}\log|x^3+\sinh 3x| & + & c_1 & x>0 \\ & = & \frac{1}{3}\log|x^3+\sinh 3x| & + & c_2 & x<0 \end{array}$$

1.(b) (primitivação por partes)

$$\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos^2 x} - \int \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x\right) + c$$

2. Seja a área A e o volume V.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0}(1-(-x))\,dx + \int_0^1 (1-x^3)\,dx \\ &= \left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}+\frac{3}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1}\pi\,dx - \int_{-1}^{0}\pi(-x)^2\,dx - \int_0^1 \pi x^6\,dx \\ &= 2\pi - \frac{1}{3}\pi\left[x^3\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{7}\left[x^7\right]_0^1 = \pi\frac{32}{21} \end{aligned}$$

3. Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, tem-se:

$$\frac{(x+1)^2+x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Portanto, tem-se a equação:

$$(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D = x^3+x^2+2x+1,$$

equivalente ao sistema:

$$\begin{array}{llllllll} x^3: & A & & & & = & 1 & \qquad A=1 \\ x^2: & & B & & & = & 1 & \qquad B=1 \\ x^1: & A & + & C & & = & 2 & \qquad C=1 \\ x^0: & & B & + & D & = & 1 & \qquad D=0 \end{array}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \int h(x)\,dx &= \int \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) + c. \end{aligned}$$

O integral impróprio

$$\begin{aligned} \int_1^\infty h(x)\,dx &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

diverge, porque o limite

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\log(x^2+1) + \arctan x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right) = \infty + \frac{\pi}{2} - 0 = \infty$$

não existe em $\mathbf{R}$.

4.(a) Usando o teorema fundamental de cálculo e $f \in C^1(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} K'(x) &= 2x\int_{-1}^{x^2} f(t)\,dt + (x^2+1)f(x^2).2x \\ K''(x) &= 2\int_{-1}^{x^2} f(t)\,dt + (2x)^2 f(x^2) + (2x)^2 f(x^2) \\ &\quad + (x^2+1)f'(x^2)(2x)^2 + (x^2+1)f(x^2).2 \end{aligned}$$

Portanto

$$K''(1) - K'(1) = 12f(1) + 8f'(1) - 4f(1) = 8(f'(1) + f(1)).$$

4.(b) Se $K(x) = 0$ para algum x, então

$$\int_{-1}^{x^2} f(t)\,dt = 0$$

para algum x, porque x^2+1 nunca se anula. Pelo teorema da média, e pela continuidade de f, existe c entre -1 e x^2 tal que

$$(x^2 - (-1))f(c) = (x^2+1)f(c) = 0$$

portanto $f(c) = 0$.

5.(a) Se f é a função definida por $f(x,y) = \log|x^2 - y|$, então o seu domínio D é dado por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y\}.$$

Temos também o interior e a fronteira de D dados por

$$\text{int D} = \{(\text{x},\text{y}) \in \mathbb{R}^2 : \text{x}^2 \neq \text{y}\}$$

e

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\}.$$

Assim podemos concluir que D é aberto, porque int D = D. D não é fechado, porque $\overline{D} = \mathbb{R}^2$, portanto $\overline{D} \neq D$. D não é limitado, porque não existe uma bola que contenha o conjunto. Finalmente D é disconexo, pois é a reunião de conjuntos separados. Os conjuntos são

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > y\} \quad \text{e} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}$$

E claramente obtemos $A \cap \bar{B} = \emptyset$, $\bar{A} \cap B = \emptyset$ e $D = A \cup B$.

5.(b) Como h é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e f é diferenciável em D, temos a seguinte igualdade de matrizes jacobianas:

$$J_{f \circ h} = J_f(h(1,1)).J_h(1,1)$$

O gradiente de f é dado por

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2 - y}, \frac{-1}{x^2 - y}\right) \text{ se } x^2 > y.$$

Assim no ponto $h(1,1) = (1,0)$ obtemos

$$\nabla f(1,0) = (2,-1).$$

Precisamos de calcular também a matriz jacobiana de h no ponto $(1,1)$.

$$J_h(u,v) = \begin{bmatrix} 2 & -2v \\ 2u & -2v \end{bmatrix}$$

Logo no ponto $(1,1)$ obtemos

$$J_h(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$J_{f \circ h}(1,1) = [2 \;\; -1] \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = [2 \;\; -2]$$

Ou seja, $\nabla(f \circ h)(1,1) = (2,-2)$.

6.(a) A função g é diferenciável em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ porque $\arctan \frac{x}{y}$ é a composta de $u \to \arctan u$ que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e de $(x,y) \to \frac{x}{y}$ que é diferenciável em D (função racional). Finalmente g obtêm-se como o produto de $(x,y) \to y$, difrenciável em $\mathbb{R}^2$ e $(x,y) \to \frac{x}{y}$ logo é diferenciável em D.

6.(b) As derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \arctan \frac{x}{y} + \frac{-\frac{x}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}$$

6.(c) Como g é diferenciável no ponto $(1,1)$ a derivada de g segundo o vector (h,h), com $h \neq 0$, no ponto $(1,1)$ é dada por

$$D_{(h,h)}g(1,1) = \nabla g(1,1).(h,h)$$

No ponto $(1,1)$ temos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Logo obtemos

$$D_{(h,h)}g(1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}).(h,h) = \frac{\pi}{4}h.$$

ou, usando a definição,

$$D_{(h,h)}g(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{g(1+th, 1+th) - g(1,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(1+th)\arctan 1 - \frac{\pi}{4}}{t} = \frac{\pi}{4}h.$$

6.(d) A função g é prolongável por continuidade à origem sse o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existe.

Para descobrir o valor de limite, podemos, por exemplo, ver qual é o limite de g segundo o eixo dos yy. Temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} g(x,y) = \lim_{y\to 0} y \arctan \frac{0}{y} = 0$$

Assim temos de provar, que de facto, o limte de g é 0. Podemos usar o critério

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \iff \exists h \quad |g(x,y) - 0| \leq h(r)$$

onde h é uma função de $r = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ que converge para 0 quando r converge para 0.

$$|g(x,y)| = |y \arctan \frac{x}{y}| \leq |y||\frac{x}{y}| = |x| \leq r$$

onde usámos a sugestão na primeira desigualdade.

Também podemos usar a definição

$$\forall_{\delta>0}\exists_{\epsilon>0} : \|(x,y)\| < \epsilon \Rightarrow |g(x,y)| < \delta.$$

Como já provámos atrás que

$$|g(x,y)| \leq \|(x,y)\|,$$

basta escolher $\epsilon = \delta$.

7. Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e os limites de integração sáo diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ (pois são polinómios), podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular as derivadas parciais de h. Assim obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = f(x_1^2 + ... + x_n^2)2x_1 - f(2x_1^2 - 2x_1 + 1)(4x_1 - 2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = f(x_1^2 + ... + x_n^2)2x_i \quad \text{se} \quad i \neq 1$$

No ponto $(1,0,...,0)$ temos $\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \ \ \forall i$, logo $\nabla h(1,0,...,0) = (0,...,0)$ o que significa que o ponto $(1,0,...,0)$ é um ponto de estacionaridade.

Precisamos também das derivadas de 2ª ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}_{|(1,0,...,0)} &= 2f(x_1^2 + ... + x_n^2) + 2x_1 f'(x_1^2 + ... + x_n^2)2x_1 - \\ &- 4f(2x_1^2 - 2x_1 + 1) - f'(2x_1^2 - 2x_1 + 1)(4x_1 - 2)^2{}_{|(1,0,...,0)} = -2f(1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}_{|(1,0,...,0)} = 2f(x_1^2 + ... + x_n^2) + 2x_i f'(x_1^2 + ... + x_n^2)2x_{i|(1,0,...,0)} = 4f'(1)+2f(1) = 2f(1),$$

se $i \neq 1$ e porque $f'(1) = 0$, pois $t = 1$ é um ponto de extremo para f.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_1}_{|(1,0,...,0)} = 4x_1 x_i f'(x_1^2 + ... + x_n^2)_{|(1,0,...,0)} = 0 \quad \text{se } i \neq 1$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}_{|(1,0,...,0)} = 4x_j x_i f'(x_1^2 + ... + x_n^2)_{|(1,0,...,0)} = 0 \quad \text{se } i \neq j \text{ e } i,j \neq 1$$

Então podemos concluir que a matriz Hessiana neste ponto é dada por

$$H(1,0,...,0) = \begin{bmatrix} -2f(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2f(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2f(1) \end{bmatrix}$$

Como $f(1) > 0$ podemos concluir que $H(1,0,...,0)$ tem $n-1$ valores próprios positivos e 1 valor próprio negativo, o que implica que a função h no ponto $(1,0,...,0)$ tem um ponto de sela.