Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

1º Semestre 2003/2004

2º *Teste* - LEEC + LEGI Alameda

10 de Novembro de 2003

Duração do Teste: 50 min
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. Considere as seguintes funções no plano (8 val.)

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}, \qquad g(x,y) = \log\sqrt{4-(x+y)^2}$$

e os seguintes conjuntos

$$A = Dom(f), \qquad B = Dom(g), \qquad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}.$$

a) Descreva A e B em termos de desigualdades e esboce os conjuntos A, B e C (em diagramas separados).

b) Indique, justificando sucintamente, quais dos cinco conjuntos: A, B, C, $A \cup C$, $A \cap B$ são: (i) abertos; (ii) fechados; (iii) limitados; (iv) conexos.

2. Considere a função (12 val.)

$$F(x,y) = \frac{x^{2k} + |x|^k|y|^k + y^{2k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

onde k é um parâmetro real.

a) Para $k = \frac{1}{2}$, calcule o limite de $F(x,y)$ quando $y = 0$ e $x \to 0$. Decida se F é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

b) Para $k = 1$, mostre que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$ existe. (Sugestão: prove que $|F(x,y)| \leq 2||(x,y)||$.)

c) Seja novamente $k = 1$ e $\phi(t) = \cos(t)$. Mostre que $\phi \circ F$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, e calcule $(\phi \circ F)$ nos pontos $(0,\pi)$ e $(0,0)$.

d) Prove que F é contínua em $\mathbb{R}^2$ para todo o $k \geq 1$.