Resolução do 2º teste de AMII - LEEC 2003/4 (10/11/2003)

1.a) Podemos descrever A e B como

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - (x+y)^2 > 0\}. \end{aligned}$$

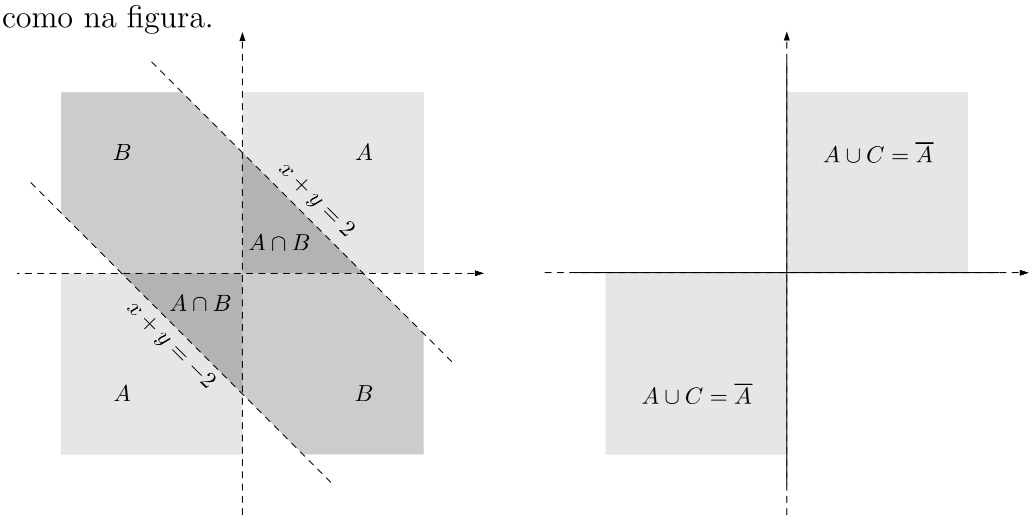
A desigualdade que define o conjunto B é equivalente a

$$(x+y)^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x+y < 2,$$

e podemos representar os conjuntos A, B, C

$$\begin{aligned} A \cup C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} \\ A \cap B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - (x+y)^2 > 0 \quad \text{e} \quad xy > 0\}, \end{aligned}$$

como na figura.



1.b) (i) A é aberto porque qualquer um dos seus pontos é o centro de uma bola de raio positivo totalmente incluida em A; B é aberto pela mesma razão; $A \cap B$ é aberto porque é uma intersecção de dois abertos. (ii) $A \cup C$ é fechado porque o seu complementar é formado pelos pontos tais que $xy < 0$ que pelo raciocínio de (i) é um conjunto aberto (alternativamente, $A \cup C$ é fechado porque contém toda a sua fronteira); C é fechado porque o seu complementar é aberto ou porque coincide com a sua fronteira. (iii) $A \cap B$ é o único conjunto limitado, pois está contido na bola aberta de raio 2 e centro na origem $B_2(0,0)$. (iv) B, C e $A \cup C$ são conexos porque não podem ser escritos como união de dois conjuntos separados.

2.a) Para $k = \frac{1}{2}$ e com $y = 0$ temos

$$\lim_{x \to 0, y=0} F(x,y) = \lim_{x \to 0, y=0} \frac{x + |x|^{\frac{1}{2}} |y|^{\frac{1}{2}} + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$$

Este limite não existe, pois se $x \to 0^+$ a expressão vale 1, enquanto que para $x \to 0^-$, ela vale -1. Concluimos então, que F não pode ser prolongável por continuidade à origem.

2.b) Usando as desigualdades (triangulares) $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ com $k=1$, obtemos

$$F(x,y) = \frac{x^2+|x|\,|y|+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |F(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2\sqrt{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2||(x,y)|| = 0,$$

de onde se conclui que existe o limite de $F(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ (e que é zero).

2.c) A função $\phi \circ F$ é dada por

$$(\phi \circ F)(x,y) = \cos\left(\frac{x^2+|x|\,|y|+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Ela é contínua em $\mathbb{R}^2$ excepto possivelmente na origem, pois é composição de ϕ (contínua em $\mathbb{R}$) e F (contínua em $\mathbb{R}^2$ excepto a origem). No entanto, como F é prolongável por continuidade à origem pela alínea 2.b) $\phi \circ F$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(\phi \circ F)(0,\pi) &= \cos\left(\frac{0+0\,|\pi|+\pi^2}{\sqrt{0+\pi^2}}\right) = \cos(\pi) = -1 \\
(\phi \circ F)(0,0) &= \cos\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)\right) = \cos(0) = 1.
\end{aligned}$$

2.d) $F(x,y)$ é quociente de funções contínuas em $\mathbb{R}^2$. Logo é contínua em $\mathbb{R}^2$ excepto possivelmente nos zeros do denominador, isto é, na origem. Para $k \geq 1$ podemos usar as desigualdades

$$|x|^k \leq |x|\,, \quad |y|^k \leq |y|\,,$$

válidas para $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$ de modo a obter a majoração

$$|F(x,y)| = \frac{x^{2k}+|x|^k\,|y|^k+y^{2k}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|^2+|x|\,|y|+|y|^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2\sqrt{x^2+y^2},$$

válida nessa região, o que prova que, tal como na alínea 2.b) existe o limite de $F(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$ (e é zero).