Breves Notas sobre
SISTEMAS DINÂMICOS DE DIMENSÃO INFINITA

Carlos Rocha

8 de Março de 2002

I - Introdução

1 - Conjuntos limite: órbitas, conjuntos α e ω-limite, atractores.

Seja X um espaço métrico completo, $r \geq 0$ e $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ (X um espaço de Banach se $r > 0$).

Definição: Um **semigrupo de classe** C^r, $r \geq 0$, (um sistema semi-dinâmico) é uma família de aplicações $T(t) : X \to X,\ t \geq 0$, tal que:
(i) $T(0) = I$;
(ii) $T(t+s) = T(t)\,T(s)$, para $t \geq 0$, $s \geq 0$;
(iii) $T(t)x$ é contínua em t, x e Fréchet diferenciável em x até à ordem r para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times X$.

Para cada $x \in X$ define-se a sua **semiórbita positiva**: $\gamma^+(x) = \{T(t)x,\ t \geq 0\}$.

Consegue ainda definir-se **semiórbita negativa**: Seja $\phi : (-\infty, 0] \to X$ contínua tal que $\phi(0) = x$ e para todo $s \leq 0$ se tem $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para $0 \leq t \leq -s$.

Como se pode dar que o contradomínio Rg $[T(t)] \neq X$, pode não existir semiórbita negativa ϕ. Se esta existir, como $T(t)$ não é necessáriamente injectiva, pode falhar a unicidade. Então define-se $\gamma^-(x) = \bigcup_{t \geq 0} H(t,x)$ onde:

$$H(t,x) = \Big\{ y \in X : \text{existe } \phi : (-\infty, 0] \to X,\ \phi(0) = x,\ \phi(-t) = y \Big\} .$$

Finalmente define-se **órbita**: $\gamma(x) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Quando a órbita (ou a semiórbita negativa) existe define-se $T(t)x$ para $t < 0$.

Para conjuntos $B \subset X$ definem-se os correspondentes conceitos:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma^+(B) = \bigcup_{x \in B}\ \gamma^+(x) \\ \gamma^-(B) = \bigcup_{x \in B}\ \gamma^-(x) \end{array}\right\} \quad \gamma(B) .$$

Definição: $\begin{cases} \textbf{conjunto } \omega - \textbf{limite} : \omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \text{ cl } \bigcup_{t \geq s} T(t)B \\ \textbf{conjunto } \alpha - \textbf{limite} : \alpha(B) = \bigcap_{s \geq 0} \text{ cl } \bigcup_{t \geq s} H(t,B) \end{cases}$

Definição: Diz-se que $B \subset X$ **atrai** $C \subset X$ **sob o fluxo de** $T(t)$ se:

$$\forall_{\epsilon > 0}\ \exists t_0 = t_0(C, \epsilon)\ \ T(t)C \subset V_\epsilon(B) \text{ para } t \geq t_0 .$$

Definição: $S \subset X$ diz-se **invariante** se:

$$\forall x \in S \text{ existe } \gamma(x) \text{ e } \gamma(x) \subset S.$$

Nota: S invariante $\Rightarrow$
$\big\{T(t)S \subset S$; e $\forall y \in S, z = T(-t)y \in S \Rightarrow T(t)z = y \in T(t)S \Rightarrow S \subset T(t)S\big\}$
$\Rightarrow\ T(t)S = S\ \ \forall t \geq 0$. Igualmente $T(t)S = S\ \forall t \geq 0\ \ \Rightarrow\ S$ invariante.
Questão: Que subconjuntos de X podem ser invariantes? Naturalmente os α e ω-limites de órbitas são invariantes.
(1) **Proposição**: Se $B \subset X$ é tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B)$ é invariante. Se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo. Se $\alpha(B)$ é compacto e $\text{dist}(\alpha(B), H(t,b)) \to 0$ quando $t \to +\infty$, então $\alpha(B)$ é invariante. Se $H(t,B)$ é conexo, $\alpha(B)$ é conexo.
Nota: Tomou-se $\text{dist}(K,C) = \sup_{y\in K} \inf_{z\in C}\ d(y,z)$.
Demonstração: Se $\omega(B) \neq \emptyset$, então $y \in \omega(B)$ é equivalente a

$$\exists \text{ sucessões } \{y_k\} \subset B,\ \{t_k\} \subset \mathbb{R}^+,\ \text{com } t_k \nearrow +\infty,\ \text{tais que } T(t_k)y_k \to y$$

e por continuidade, para $t \geq 0$, $T(t+t_k)y_k \to T(t)y$ e portanto $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$. Igualmente, como $\omega(B)$ é compacto e atrai B existe uma subsucessão $\{t'_k\}$ tal que $T(t'_k - t)y_k \to z$. Então $z \in \omega(B)$ e portanto $T(t)z = y \in T(t)\omega(B) \Rightarrow \omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ concluindo-se que $\omega(B)$ é invariante. Seja B conexo e $\omega(B) = A_1 \cup A_2$ com A_1, A_2 compactos disjuntos tais que $\text{dist}(A_1, A_2) > \delta$. Então como A_1 e A_2 atraem B pode obter-se uma subsucessão $\{z_k\}$ tal que $\text{dist}(z_k, A_1) > \delta/2$ e $\text{dist}(z_k, A_2) > \delta/2$, uma contradição.
Questão: Quando é que os conjuntos α e ω-limite de um conjunto B são compactos e atraem B?
(2) **Proposição**: Se $B \subset X$ é não vazio e $\gamma^+(B)$ é pré-compacto então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B. Se $\gamma^-(B)$ é não vazio e pré-compacto então $\alpha(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e

$$\text{dist}\ (x(B), H(t,B)) \to 0$$

quando $t \to +\infty$.
Demonstração: Se $B \neq \emptyset$ e $\text{cl}\ \gamma^+(B)$ é compacto, então $\omega(B)$ é não-vazio e compacto. Se $\omega(B)$ não atrai B então existe $\epsilon > 0$ e existem sucessões $\{t_k\} \subset \mathbb{R}^+$, com $t_k \nearrow +\infty$, $\{y_k\} \subset B$, tais que $\text{dist}(T(t_k)y_k, \omega(B)) > \epsilon$ para todo o k. Mas $T(t_k)y_k \subset \text{cl}\ \gamma^+(B)$ que é compacto e tem-se uma subsucessão convergente $T(t_{k'})y_{k'} \to z$, $\text{dist}(z, \omega(B)) > \epsilon$. Como $z \in \omega(B)$ tem-se uma contradição!

2 - Regularidade assimptótica, contracções-α.

Questões: (Dos últimos 25 anos)
(1)- Quando é que uma equação de evolução define um semigrupo C^r?

(2)- Quando é que o fluxo possui um atractor compacto (máximo invariante compacto)?
(3)- Quais as propriedades do atractor? Conterá $\omega(B)$ para B limitado?
Para responder à questão 1 é necessário obter propriedades de existência local, extensão de solução e dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais. Para responder a 2 e 3 é necessário obter propriedades de regularização do semigrupo $T(t)$, e uma certa propriedade de "instabilidade do ∞".
Definição: O semigrupo $T(t)$ diz-se **assimptoticamente regular** se para todo $B \subset X$ com B limitado, fechado e não vazio tal que $T(t)B \subset B$ para $t \geq 0$, existe um conjunto compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.
Caracterização dos semigrupos assimptoticamente regulares:
(3) **Lema**: $T(t)$ é **assimptoticamente regular** se e só se para todo $B \subset X$, B limitado, fechado e não vazio, existe um conjunto compacto $J = J(B) \subset X$, tal que $J(B)$ atrai o conjunto $L(B) = \{x \in B : T(t) \in B \text{ para } t \geq 0\}$.
Demonstração: ($\Leftarrow$) Se B é limitado e fechado e $T(t)B \subset B$ para $t \geq 0$ então $L(B) = B$ e $J(B)$ atrai B.
($\Rightarrow$) Se B é limitado e fechado e $L = L(B)$ então $T(t)L \subset L$. Por continuidade para cada $t \geq 0$, tem-se $T(t)\overline{L} \subset \overline{L}$ para $t \geq 0$ e existe J atraindo $\overline{L}$.
Na verdade para estes semigrupos obtem-se a propriedade desejada (mesmo sem assumir pré-compacidade de γ^+).
(4) **Proposição**: Se $T(t)$ é assimptoticamente regular e o conjunto não vazio $B \subset X$ é tal que $\gamma^+(B)$ é limitado, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B. Se além disso B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo. Em particular, se a semiórbita $\gamma^+(x)$ é limitada para $x \in X$ então cl $\gamma^+(x)$ é compacto e $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, conexo e invariante.
Demonstração: É necessário obter a compacidade de $\omega(B)$. Então

$$T(t)\gamma^+(B) \subset \gamma^+(B) \text{ e } T \text{ contínua} \Rightarrow T(t) \text{ cl } \gamma^+(B) \subset \text{cl } \gamma^+(B).$$

Mas T assimptoticamente regular implica a existência de J compacto, $J \subset$ cl $\gamma^+(B)$, tal que J atrai B. Portanto existem sucessões $\epsilon_k \searrow 0$ e $t_k \nearrow +\infty$ tais que $T(t)B \subset V_{\epsilon_k}(J)$ para $t \geq t_k$. Conclui-se que $\omega(B) \subset J$. Mas J compacto e $\omega(B)$ fechado $\Rightarrow \omega(B)$ compacto.
Falta provar que $\omega(B)$ atrai B. Supondo que $\omega(B)$ não atrai B temos que existem $\epsilon > 0$, $t_k \nearrow +\infty$, $y_k \in B$ tais que $T(t_k)y_k \notin V_\epsilon(\omega(B))$. Mas J atrai B e é compacto, portanto usando uma sucessão em J para extrair uma subsucessão convergente, obtem-se uma subsucessão $T(t_k)y_k \to z \in J$. Mas como então $z \in \omega(B)$, temos uma contradição.
O resto da Proposição provem da Proposição (1).
Questão: Que classes interessantes de semigrupos $T(t)$ são assimptoticamente regulares?

Definição: Um semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, diz-se **condicionalmente completamente contínuo** para $t \geq t_1$ se para cada $t \geq t_1$ e cada conjunto limitado $B \subset X$, tal que $\{T(s)B,\ 0 \leq s \leq t\}$ é limitado, se tem que $T(t)B$ é pré-compacto.
Definição: $T(t)$, $t \geq 0$, diz-se **completamente contínuo** ou **compacto** se fôr condicionalmente completamente contínuo e, para cada $t \geq 0$, $B \subset X$ e B limitado implicam que $\{T(s)B,\ 0 \leq s \leq t\}$ é limitado.
(5) **Proposição**: Se $T(t)$, $t \geq 0$, é condicionalmente completamente contínuo para $t \geq t_0$, então $T(t)$ é assimptoticamente regular.
Demonstração: Imediato.
Seja X um espaço de Banach.
(6) **Teorema**: Se $T(t)$, $t \geq 0$, é tal que $T(t) = S(t) + U(t)$ onde $U(t) : X \to X$, $t \geq 0$, é completamente contínuo e $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$, é tal que existe uma função contínua $k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $k(t, r) \to 0$ quando $t \to +\infty$ e $|S(t)x| \leq k(t, r)$ se $|x| \leq r$, então $T(t)$ é assimptoticamente regular.
Para provar este teorema é necessário introduzir a noção de medida de não-compacidade. Seja X um espaço métrico completo.
Definição: Sendo $B \subset X$, B limitado, define-se a **medida de não-compacidade de Kuratowski** $\alpha(B)$:

$$\alpha(B) = \inf\{d : B \text{ tem cobertura finita de diâmetro } < d\}$$

onde o diâmetro de um conjunto A é dado por:

$$\text{diâmetro } (A) = \sup_{x, x' \in A} d(x, x').$$

Por uma questão de notação usar-se-á β para a medida de não-compacidade.
Propriedades gerais:
1. $\beta(B) = 0$ se e só se B é pré-compacto.
2. $\beta(A \cup B) = \max\{\beta(A), \beta(B)\}$.
3. $\beta(\overline{\text{co}}B) = \beta(B)$, onde $\overline{\text{co}}$ designa o envólucro convexo fechado.

Referências:
B. N. Sadovskii, Limit compact and condensing operators, Russian Math. Surveys, 163 (1972) p.85-146, (*Motivado por teoremas de ponto fixo*).
P. Massat, Some properties of condensing maps, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 125 (1980) p.101-115.

Outras propriedades:
4. Se $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ são subconjuntos fechados não-vazios de X tais que $\beta(A_i) \to 0$ quando $i \to +\infty$, então $\bigcap_{i \geq 0} A_i$ é não-vazio e compacto.
5. Definindo $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$, então:

$$\beta(A + B) \leq \beta(A) + \beta(B).$$

Demonstração de (6):
Seja $B_r = \{x \in X : |x| \leq r\}$ e $L_r = \{x \in B_r : T(t)x \in B_r, t \geq 0\}$. Mostra-se que existe $J = J(B_r)$ compacto tal que J atrai L_r e utiliza-se o Lemma (3). Seja β a medida de não compacidade de Kuratowski. Então:

$$\gamma^+(T(t)L_r) = T(t)\gamma^+(L_r)\ ,\ t \geq 0 \ \text{ e } \ \gamma^+(L_r) \subset B_r.$$

Portanto, por 5. e 1. obtem-se:

$$\beta\Big(\gamma^+(T(t)L_r)\Big) = \beta([S(t) + U(t)]\gamma^+(L_r)) \leq \beta(S(t)\gamma^+(L_r)) \leq k(t, r), \quad t \geq 0.$$

Assim $\beta\Big(\text{cl}\ \gamma^+(T(t)L_r)\Big) \leq k(t, r)$ e tende para 0 quando $t \to +\infty$. Como $\omega(L_r) = \bigcap_{t\geq 0} \text{cl}\ \gamma^+(T(t)L_r) = \bigcap_{n\geq 0} \text{cl}\ \gamma^+(T(n)L_r)$ por 4. tem-se que $\omega(L_r)$ é não-vazio e compacto. Então $J(B_r) = \omega(L_r)$ e mostra-se que atrai L_r. Supondo que não:

$$\exists\, \epsilon > 0,\ \{t_k\} \subset \mathbb{R},\ t_k \nearrow +\infty,\ \{y_k\} \subset L_r \ \text{ tais que } \ T(t_k)y_k \notin V_\epsilon(\omega(L_r)).$$

Seja $A_j = \text{cl}\ \{T(t_k)y_k : k \geq j\}$. Então $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ e

$$\beta(A_j) = \beta\Big(T(t_j)\{T(t_k - t_j)y_k : k \geq j\}\Big)$$

$$\leq \beta(T(t_j)L_r) \leq \beta(S(t_j)B_r) \leq k(t_j, r) \to 0\,,$$

portanto $\bigcap_{j\geq 0} A_j$ é não vazio e compacto. Assim, para uma subsucessão tem-se $T(t_{k'})y_{k'} \to z \in \omega(L_r)$, obtendo-se uma contradição.

Definição: Um semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, diz-se uma **contracção-β condicional** com respeito à medida da não-compacidade β se existe uma função contínua $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $k(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$ e para cada $t > 0$ e cada conjunto limitado $B \subset X$ tal que $\{T(s)B, 0 \leq s \leq t\}$ é limitado se tem:

$$\beta(T(t)B) \leq k(t)\beta(B)\,.$$

Definição: O semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, diz-se uma **contracção-β** se é uma contracção-β condicional e para cada $t > 0$ o conjunto $\{T(s)B,\ 0 \leq s \leq t\}$ é limitado se B é limitado.

Notas:
(1) A função k diz-se uma função de contracção para o semigrupo $T(t)$.
(2) **Definição**: Uma aplicação contínua $T : X \to X$ diz-se uma **contracção-β** se T é limitada (isto é, transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados), e para cada conjunto limitado $B \subset X$ se tem $\beta(TB) \leq K\beta(B)$ com $0 \leq K < 1$.

Definição: O semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, diz-se uma **condensacção-β** se para cada conjunto limitado $B \subset X$ o conjunto $\{T(s)B,\ 0 \leq s \leq t\}$ é limitado para cada $t > 0$ e $\beta(T(t)B) < \beta(B)$ se $\beta(B) > 0$.

(7) **Lema**: Seja $T(t)$, $t \geq 0$, um semigrupo com a seguinte propriedade: existe uma função $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ não-decrescente tal que para todo $t > 0$

e $B \subset X$, B limitado, se tem $\beta(T(t)B) \leq M(t)\beta(B)$. Então $T(t)$, $t \geq 0$, é uma contracção-β se e só se existe $t_0 > 0$ tal que $T(t_0)$ é uma contracção-β.
Nota: A hipótese em M é muito pouco restritiva.
Demonstração:($\Rightarrow$) Seja $T(t)$, $t \geq 0$, uma contracção-β com função contínua k. Então existe $t_0 > 0$ tal que $k(t_0) < 1$ e portanto $T(t_0)$ é uma contracção-β.
($\Leftarrow$) Seja $T(t_0)$, com $t \geq 0$, uma contracção-β e seja $\alpha > 0$ tal que $K = e^{-\alpha t_0}$. Para cada $t \in \mathbb{R}^+$ existe um inteiro $n = n(t)$ tal que $nt_0 \leq t \leq (n+1)t_0$. Então, para todo o conjunto limitado $B \subset X$ tem-se $T(t)B = [T(t_0)]^n T(s(t))B$, onde $s(t) = t - nt_0$. Portanto

$$\beta(T(t)B) \leq e^{-\alpha t_0 n}\beta\Big(T(s(t))B\Big) \leq e^{-n\alpha t_0}M(s(t))\beta(B) \leq M(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)}\beta(B),$$

visto que $0 \leq s(t) < t_0$ e que $nt_0 > t - t_0$. Então $T(t)$, $t \geq 0$, é uma contracção-β com função de contracção $k(t) = M(t_0)e^{\alpha(t_0-t)}$.
(8) **Proposição**: As contracções-β condicionais são assimptoticamente regulares.
Demonstração: Seja $B \subset X$, B limitado, tal que $T(t)B \subset B$ para $t \geq 0$.
a) Vai-se demostrar que existe um conjunto compacto $J \subset X$ que atrai B. Então $\gamma^+(B)$ é limitado e

$$\beta\Big(\text{cl}\,\gamma^+(T(t)B)\Big) = \beta\Big(\gamma^+(T(t)B)\Big) = \beta(T(t)\gamma^+(B)) \leq k(t)\beta(\gamma^+(B))\,.$$

Mas $\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} \text{cl}\,\gamma^+(T(t)B)$ e $k(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Então $J = \omega(B)$ é compacto.
b) $\omega(B)$ atrai B (ver demonstração de (6)).

3 - Estabilidade de Conjuntos Invariantes.

Seja $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, um semigrupo de classe C^r, $r \geq 0$, e J um conjunto invariante.
Definição: J diz-se **estável**, se para qualquer vizinhança V de J existe uma vizinhança U de J tal que $T(t)U \subset V$ para $t \geq 0$.
(9) **Lema**: J é estável se e só se para cada vizinhança V de J existe $V' \subset V$ contendo uma vizinhaça de J tal que $T(t)V' \subset V'$ para $t \geq 0$.
Demonstração: ($\Leftarrow$) Óbvio; ($\Rightarrow$) Se J é estável existe uma vizinhança U de J tal que $T(t)U \subset V$ para $t \geq 0$. Toma-se $V' = \bigcup_{t\geq 0} T(t)U$.
Nota: Se $T(t)$ não fôr um homeomorfismo V' pode não ser aberto.
Definição: O conjunto invariante J diz-se que **atrai pontos localmente** se existe uma vizinhança W de J tal que J atrai pontos de W.
Definição: J diz-se **assimptoticamente estável** se J é estável e atrai pontos localmente.
Definição: J diz-se **uniformemente assimptoticamente estável** se J é estável e atrai uma vizinhança de J.

(10) **Lema**: Se $T(t)$, $t \geq 0$, é assimptoticamente regular e se J é um conjunto compacto, invariante e estável então são equivalentes as seguintes afirmações:
(i) J atrai pontos localmente;
(ii) Existe um conjunto W limitado contendo uma vizinhaça de J tal que $T(t)W \subset W$, $t \geq 0$, e J atrai subconjuntos compactos de W.
Demonstração: (ii) $\Rightarrow$ (i): Óbvio; (i) $\Rightarrow$ (ii): Pelo Lema (9) vamos assumir que o conjunto limitado $W \subset X$ contendo uma vizinhança de J é tal que $T(t)W \subset W$. Seja $H \subset W$, H compacto. Então $\gamma^+(H)$ é limitado e pela Proposição (4) temos que $\omega(H)$ é compacto e atrai H. Seja $U \subset W$, uma vizinhança aberta de J. Então pela estabilidade de J existe uma vizinhança $U' \subset U$ de J tal que $T(t)U' \subset U$.
(Para referência futura demarca-se a argumentação que segue)

$(*)$ ____

Para cada $x \in H$ existe $t_0 = t_0(x, U)$ tal que se $T(t_0)x \in U'$ então $T(t)x \in U$ para $t \geq t_0$. Como $T(t)$ é contínua existe uma vizinhança O_x de x tal que $T(t)O_x \subset U$ para $t \geq t_0$. Seja $\{O_{x_i}, i = 1, \ldots, p\}$ uma cobertura finita de H, seja $N = N(H, U) = \max_i t_0(x_i, U)$ e seja $V = V(H, U) = \bigcup_i O_{x_i}$, ($V$ é uma vizinhança de H). Então $T(t)V \subset U$ para $t \geq N$.

____ $(*)$

Tomando uma sucessão $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ tal que $\bigcap_i U_i = J$ conclui-se que $\omega(H) \subset J$ e portanto J atrai H.
Notas:
(a) **Definição**: O conjunto invariante J diz-se **isolado** se existe uma vizinhança V de J tal que se K é um subconjunto invariante de V então $K \subset J$.
(b) Se J é um invariante isolado então é fechado (por continuidade de $T(t)$).
(c) Se $\dim X < \infty$ o lema anterior implica que J e um invariante isolado limitado (portanto compacto) e então J é assimptoticamente estável se e só se J é uniformemente assimptoticamente estável.
(11) **Teorema**: Se $T(t)$ é assimptoticamente regular e J é um conjunto compacto invariante que atrai pontos localmente então as seguintes afirmações são equivalentes:
(i) Existe um conjunto limitado $W \subset X$ contendo uma vizinhança de J tal que $T(t)W \subset W$, $t \geq 0$, e J atrai subconjuntos compactos de W;
(ii) J é estável;
(iii) J é uniformemente assimptoticamente estável.
e cada uma das condições implica que J é isolado.
Demonstração: (iii) $\Rightarrow$ (ii): Óbvio; (ii) $\Rightarrow$ (i): Lema (10).
(**Nota**: No argumento seguinte não é usada a regularidade assimptótica de $T(t)$, nem que $T(t)W \subset W$, sendo apenas usado o facto de que J atrai conjuntos compactos).

$(**)$ ____

(i) $\Rightarrow$ (ii): (Por contradição) Caso contrário para todo o $\epsilon > 0$, existem $\{t_k\}$, $t_k \nearrow +\infty$, e $\{y_k\}$, $y_k \to y \in J$ tais que $y_k \in V_\epsilon(J)$ e $T(t_k)y_k \notin V_\epsilon(J)$. O conjunto $H = \{y, y_k; k \geq 1\}$ é compacto e portanto J atrai H. Então existe $t_0 = t_0(H, \epsilon)$ tal que $T(t)H \subset V_\epsilon(J)$ para $t \geq t_0$, uma contradição.

——————————————————————— $(**)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Dada a vizinhança $U \subset W$ de J existe uma vizinhança U' de J tal que $T(t)U' \subset U$. Pelo argumento $(*)$ da demonstração anterior, para H compacto tal que $H \subset W$, existe uma vizinhança V de H e um $N = N(H, U)$ tal que $T(t)V \subset U$ para $t \geq N$. Como $T(t)$, $t \geq 0$, é assimptoticamente regular existe um conjunto compacto $K \subset W$ que atrai U (basta tomar $B = \operatorname{cl} W$, $U \subset L(B)$). Mas por (i) J atrai K, segue-se que J atrai U e portanto atrai a vizinhança V do compacto H. Tomando $H = J$ tem-se que J atrai uma vizinhança de J e portanto é uniformemente assimptoticamente estável. Finalmente (i) $\Rightarrow$ J é isolado: Basta mostrar que $\omega(W) \subset J$. Então, como $T(t)$, $t \geq 0$, é assimptoticamente regular da Proposição (4) segue-se que $\omega(W)$ é compacto. Mas como J atrai conjuntos compactos e $\omega(W)$ é invariante segue-se que $\omega(W) \subset J$.

(12) **Corolário**: Se $T(t)$, $t \geq 0$, é assimptoticamente regular, então um conjunto compacto invariante J é assimptoticamente estável se e só se é uniformemente assimptoticamente estável.

4 - Semigrupos dissipativos e atractores globais.

Definição: O semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$ diz-se **dissipativo** para pontos (dissipativo para compactos, localmente dissipativo para compactos, dissipativo para limitados) se existe um conjunto limitado $B \subset X$ que atrai cada ponto de X (cada compacto de X, uma vizinhança de cada compacto de X, cada limitado de X) sob o fluxo de $T(t)$.

Definição: Para o semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, o conjunto compacto invariante A diz-se o **máximo compacto invariante** se todo o compacto invariante do semigrupo pertencer a A.

Definição: O conjunto invariante A diz-se o **atractor global** se A fôr o máximo compacto invariante que atrai os conjuntos limitados $B \subset X$.

No que se segue considera-se X um espaço de Banach.

(13) **Lema**: Se J é um conjunto invariante compacto que atrai conjuntos compactos, então J é conexo.

Demonstração: O conjunto $\overline{\text{co}}J$ é compacto, conexo e é atraído por J. Se J não é conexo, então $J = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Como $J \subset T(t)[\overline{\text{co}}J], t \geq 0$, e T é contínua tem-se que $T(t)[\overline{\text{co}}J]$ é conexo. Sendo $T(t)[\overline{\text{co}}J] \cap C \neq \emptyset$ para $t \geq 0$ com $C = A$ e $C = B$, tem-se que existe uma sucessão $\{t_k\}$ tal que $T(t_k)[\overline{\text{co}}J] \notin A \cup B$. Mas como $T(t_k)[\overline{\text{co}}J]$ é compacto tem-se que existe uma

subsucessão convergente para $z \notin A \cup B$ e $z \in J$, uma contradição.
(14) **Teorema**: Seja $T(t) : X \to X$ um semigrupo-C^r, $r > 0$, tal que existe um conjunto compacto $K \neq \emptyset$ que atrai compactos de X e seja $A = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K$. Então:
(i) A é conexo e independente de K.
(ii) A é o máximo compacto invariante.
(iii) A é estável e atrai compactos.
Se além disso $T(t)$ é assimptoticamente regular, então:
(iv) Qualquer que seja o conjunto compacto $H \subset X$ existe uma vizinhança H_1 de H tal que $\gamma^+(H_1)$ é limitado e A atrai H_1. Portanto A é uniformemente assimptoticamente estável.
(v) Se $C \subset X$ é tal que $\gamma^+(C)$ é limitado então A atrai C.
Finalmente, se $T(t)$ é injectiva em A então $T(t)|_A$ é um grupo-C^r.
Demonstração: (Ver teorema (11)) Sendo $H \subset X$, H compacto, então $T(t)H \to K$, cl $\gamma^+(H)$ é compacto, e $\omega(H) \subset K$. Em particular, $\omega(K) \subset K$ e $\omega(K) = A$ que é não-vazio, compacto, invariante e atrai compactos. Pelo lema anterior A é conexo. Se houver outro conjunto K_1, então $\omega(K_1) \subset \omega(K) \subset \omega(K_1)$ e conclui-se que A é independente de K. Para provar que A é estável usa-se $(**)$ do Teorema (11). Para provar (iv) usa-se o argumento a seguir a $(**)$ no Teorema (11). Para provar (v) basta notar que $T(t)\text{cl}\, \gamma^+(C) \subset \text{cl}\, \gamma^+(C)$ e, pela Proposição (4), $K = \omega(C)$ é compacto não-vazio e atrai $\gamma^+(C)$. Então (iii) implica que A atrai C. Finalmente, seja $T(t)$ um semigrupo-C^r e $T(t)$ injectiva. Então, como A é invariante tem-se que $T(t)$ é sobrejectiva em A. Assim $T(t)$ tem inversa em A e $T(t)^{-1}|_A = T(-t)|_A$. Finalmente, $T(t)|_A$ contínua e A compacto implica que $T(t)^{-1}|_A$ é contínua (ver Royden, p.159). Portanto $T(t)|_A$ é um grupo-C^r.
(15) **Corolário**: Se $T(t)$ é assimptoticamente regular então as seguintes afirmações são equivalentes:
(i) existe um conjunto compacto que atrai os conjuntos compactos de X.
(ii) existe um conjunto compacto que atrai uma vizinhança de cada compacto de X.
(16) **Teorema**: Se o semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, é assimptoticamente regular, dissipativo para pontos, e as semiórbitas positivas de conjuntos limitados são limitadas, então existe um atractor global A.
Demonstração: 1) Existe um compacto que atrai pontos: Seja $B \subset X$ o conjunto limitado que atrai pontos e seja $\overline{B} = \text{cl}\, B$. Então $L(\overline{B}) = \{x \in \overline{B} : T(t)x \in \overline{B}, t \geq 0\}$ atrai pontos (pela Proposição (4)), e $\gamma^+(L(\overline{B}))$ é limitado. Como $T(t)\gamma^+(L(\overline{B})) \subset \gamma^+(L(\overline{B}))$ e $T(t)$ é assimptoticamente regular, o Lema (3) implica que existe um conjunto compacto $K \subset X$ que atrai $L(\overline{B})$ e também pontos de X. Como K se atrai a si mesmo e $\gamma^+(K)$ é pré-compacto, segue-se que $J = \omega(K)$ é compacto, invariante e atrai pontos.

2) Existe uma vizinhança V de J que atrai uma vizinhança de cada compacto: Dada uma vizinhança V de J tem-se que $\gamma^+(V)$ é limitada. Usando o argumento $(*)$ obtem-se que dado o conjunto compacto $H \subset X$ existe uma vizinhança H_1 de H tal que $\gamma^+(V)$ atrai H_1. Conclui-se que $T(t)$ é localmente dissipativa para compactos.
3) Existe um conjunto compacto que atrai os conjuntos compactos: Se $B \subset X$ é o conjunto limitado que atrai conjuntos compactos ($B = \gamma^+(V)$), então $L(B) = \{x \in B : T(t)x \in B, t \geq 0\}$ satisfaz $T(t)\text{cl}\ L(B) \subset \text{cl}\ L(B)$ para $t \geq 0$ e existe um conjunto compacto K que atrai cl $L(B)$ (Lema (3)). Então K atrai conjuntos compactos (pela Proposição (4)). Pelo Teorema (14) tem-se que $A = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K$ é o atractor global. Conclui-se do Teorema (14(v)) que $T(t)$ é dissipativa para limitados.

5 - Dependência de parâmetros, semicontinuidade superior.

Seja Λ um espaço métrico, X um espaço métrico completo e, para $\lambda \in \Lambda$, $T(t,\lambda) : X \to X$ um semigrupo-C^r, $r \geq 0$, com $T(t,\lambda)x$ contínua em t, λ, x. Tem-se pela definição que, para $\lambda \in \Lambda$, se $T(t,\lambda)$ é assimptoticamente regular, então para qualquer conjunto limitado $B \subset X$ tal que $T(t,\lambda)B \subset B$, $t \geq 0$, existe um conjunto compacto $K_\lambda(B) \subset B$ tal que $K_\lambda(B)$ atrai B sob o fluxo de $T(t,\lambda)$.
Definição: Diz-se que $\{T(t,\lambda), t \geq 0, \lambda \in \Lambda\}$ é **colectivamente assimptoticamente regular** se $T(t,\lambda)$ é assimptoticamente regular para cada $\lambda \in \Lambda$ e $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda(B)$ é pré-compacto.
Definição: $\{T(t,\lambda), t \geq 0, \lambda \in \Lambda\}$ é **colectivamente contracção-**β se $T(t,\lambda)$ é uma contracção-β para cada $\lambda \in \Lambda$, e existem $t_0, k \in [0,1)$ tais que para todo o conjunto limitado $B \subset X$ tal que $\beta(B) > 0$ se tem

$$\beta\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{T(s,\lambda)B, 0 \leq s \leq t_0\}\Big) \leq k\,\beta(B)\ .$$

(17) **Lema**: Se $\{T(t,\lambda), t \geq 0, \lambda \in \Lambda\}$ é colectivamente contracção-β então é colectivamente assimptoticamente regular.
Demonstração: Pela Proposição (8) tem-se que para cada $\lambda \in \Lambda$, $T(t,\lambda)$ é assimptoticamente regular. Para $B \subset X$, B fechado, limitado e não-vazio, tal que $T(t,\lambda)B \subset B$ para $t \geq 0$, seja $K_\lambda(B) \subset B$ o conjunto compacto que atrai B sob o fluxo $T(t,\lambda)$. Em particular tem-se $T(t,\lambda)K_\lambda(B) = K_\lambda(B)$ (ver Teorema (16)). Então $\Phi = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda(B)$ é limitado (pois está em B) e:

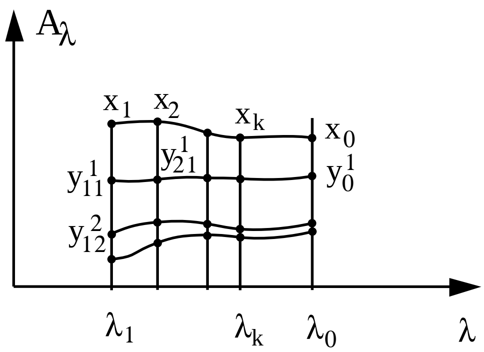
$$\beta(\Phi) = \beta(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) = \beta\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{T(s,\lambda)K_\lambda, 0 \leq s \leq t_0\}\Big)$$

$$\leq \beta\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{T(s,\lambda)\Phi, 0\leq s\leq t_0\}\Big)\ .$$

Então $\beta(\Phi) \leq k\beta(\Phi)$ se $\beta(\Phi) > 0$ obtendo-se $(1-k)\beta(\Phi) \geq 0$, uma contradição. Portanto $\beta(\Phi) = 0$ e $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda(B)$ é pré-compacto concluindo-se que $T(t,\lambda)$ é colectivamente assimptoticamente regular.

(18) **Teorema**: Seja $T(t,\lambda) : X \to X$, $t \geq 0$, um semigrupo-C^r para cada $\lambda \in \Lambda$ tal que existe um conjunto limitado $B_0 \subset X$ (independente de λ) que atrai pontos de X sob o fluxo de $T(t,\lambda)$, e para cada conjunto limitado $B \subset X$ o conjunto $\Gamma = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{t\geq 0} T(t,\lambda)B$ é limitado. Se a família de semigrupos $T(t,\lambda)$ é colectivamente assimptoticamente regular, então o atractor global A_λ é semicontínuo superior em $\lambda \in \Lambda$.

Demonstração: Pode-se escolher B_0 fechado. Pelo Teorema (16) tem-se que A_λ existe para cada $\lambda \in \Lambda$ e $A_\lambda \subset B_0$. Seja $H \subset X$ um conjunto compacto. Então, A_λ atrai H para cada $\lambda \in \Lambda$, e portanto $\Gamma = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{t\geq 0} T(t,\lambda)B_0 \supset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ atrai H sob o fluxo de $T(\lambda,t)$ para cada $\lambda \in \Lambda$ e portanto Γ atrai conjuntos compactos H. O conjunto $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \Gamma$ é limitado e $T(\lambda,t)$ colectivamente assimptoticamente regular, portanto $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é pré-compacto. A_λ é semicontínuo superior se e só se para toda a sucessão $\{\lambda_k\} \subset \Lambda$, $\lambda_k \to \lambda_0$ e toda a sucessão $\{x_k\} \subset X$ com $x_k \in A_{\lambda_k}$ e $x_k \to x_0$ se tem que $x_0 \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_k} é invariante para $T(t,\lambda_k)$, dada uma sucessão $\{t_j\}$, $t_j \to +\infty$, pode-se determinar para cada t_j uma sucessão $\{y_k^j\} \subset X$ tal que $T(t_j,\lambda_k)y_k^j = x_k$. Como $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é pré-compacto e B_0 é fechado, para $j = 1$ obtem-se uma subsucessão $y_{k'}^1 \to y_0^1$.



Sendo $T(t,\lambda)$ contínuo em λ, fazendo $\lambda_k \to \lambda_0$ obtem-se $T(t_1,\lambda_0)y_0^1 = x_0$. Para $j = 2$ obtem-se uma subsucessão $y_{k''}^2 \to y_0^2$ e tem-se $T(t_2,\lambda_0)y_0^2 = x_0 \ldots$ Por triangularização obtem-se uma subsucessão $\{y_0^j\} \subset X$ tal que

$$T(t_j,\lambda_0)y_0^j = x_0.$$

Como $\{y_0^j\} \subset B_0$ tem-se que $\gamma_{\lambda_0}(x_0) \subset B_0$ e como $\gamma_{\lambda_0}(x_0)$ é invariante para $T(t,\lambda_0)$ temos que $x_0 \in \gamma_{\lambda_0}(x_0) \subset A_{\lambda_0}$.

Notas:
Definição: Os semigrupos $T(t, \lambda_1)$ e $T(t, \lambda_2)$ dizem-se **equivalentes** (A-equivalentes), escrevendo-se $T(t, \lambda_1) \sim T(t, \lambda_2)$, se existe um homeomorfismo entre A_{λ_1} e A_{λ_2} que transforma órbitas em órbitas preservando a direcção de evolução no tempo. Note-se que o homeomorfismo não dá necessáriamente uma conjugação e, para que a definição de equivalência tenha algum interesse, não pode ser um difeomorfismo.
Definição: O semigrupo $T(t, \lambda_0)$ diz-se **estruturalmente estável** (A-estável). Se existe uma vizinhança $V(\lambda_0)$ tal que $T(t, \lambda) \sim T(t, \lambda_0)$ para todo o $\lambda \in V(\lambda_0)$.
Proposição: Se $T(t, \lambda_1) \sim T(t, \lambda_2)$ e $T(t, \lambda_1)$ é bijectiva em A_{λ_1} então $T(t, \lambda_2)$ é bijectiva em A_{λ_2}.
Corolário: Se $T(t, \lambda_0)$ é estruturalmente estável e bijectiva em A_{λ_0}, então existe uma vizinhança $V(\lambda_0)$ tal que $T(t, \lambda)$ é bijectiva em A_λ para $\lambda \in V(\lambda_0)$.
Exercício: Refazer a demonstração apresentada em N. Sternberg, J. Differential Equations, 85 (1990), p.201-213.

6 - Fluxo produto assimétrico.

Consultar: L. T. Magalhães e C. Rocha, Methods of Nonlinear Dynamical Systems Theory.
Considera-se o sistema não-autónomo $\dot{x} = f(t, x)$ com $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Define-se a translacção $f_t(s, \cdot) = f(s + t, \cdot)$ e o conjunto compacto $H(f) = \mathrm{cl}_{C^1_w}\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$. Então, no novo espaço de fase $X = \mathbb{R}^n \times H(f)$ define-se o fluxo produto assimétrico $\pi : \mathbb{R} \times X \to X$ dado por $\pi(t, (x_0, f)) = (x(t, x_0), f_t)$, ou seja $\pi = (\psi, \sigma)$ com $\psi(t, x_0) = x(t, x_0)$ a solução do sistema não-autónomo e $\sigma(t, f) = f_t$ o fluxo correspondente à translacção.
Exemplo: A linearização de um sistema autónomo em torno de uma solução ϕ conhecida, $\psi(t, z, x) = D_x\phi(t, x)z$. O fluxo produto assimétrico obtido diz-se linear.

7 - Sistemas Gradiantes.

Elementos Geométricos: Seja $T(t)$, $t \geq 0$, um semigrupo-C^r em X, e E o conjunto dos seus pontos de equilíbrio:

$$x \in E \;\; \Leftrightarrow \;\; T(t)x = x, \;\; t \geq 0\,.$$

Definições: O ponto de equilíbrio $x \in E$ diz-se **hiperbólico** se e só se o espectro $\sigma(DT(t)x)$ não intersecta o círculo unitário em $\mathbb{C}$. Se $T(t)$, $t \geq 0$, possui um atractor global A, então $E \subset A$. Define-se o conjunto não-errante

$\Omega \subset A$:

$x \in \Omega \ \Leftrightarrow \ \forall \ V(x), t_0 > 0 \quad \exists \, t = t(V, t_0) > t_0$ tal que $y \in V(x)$ e $T(t)y \in V(x)$

Nota: Sendo $T(t)$ injectiva em A compacto, tem-se que Ω é invariante, $T(t)\Omega = \Omega$. A demonstração é idêntica à da invariância do conjunto limite $\omega(B)$. Seja P o conjunto das órbitas periódicas de $T(t)$. Então $E \cup P \subset \Omega$.
Definição: A órbita $\gamma_x \in P$ diz-se hiperbólica se o espectro $\sigma(D\pi(x))$ não intersecta o círculo unitário (π designa a aplicação de Poincaré).
É natural considerar a aplicação de unidade de tempo de fluxo (time-one map). Imediatamente se obtem as seguintes relações de inclusão dos vários conjuntos relativos ao fluxo e à sua aplicação de unidade de tempo de fluxo:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T(1)} & \mathrm{T(t)} \\ E \arrow[dr] & E \arrow[l] \\ P \arrow[r] & P \arrow[dl] \\ \Omega \arrow[r, leftrightarrow] & \Omega \end{tikzcd}$$

Variedades estável e instável: Para $x \in E$, definem-se os conjuntos:

$W^u(x) = \{y \in X : T(-t)y$ está definido para $t \geq 0$
e $T(-t)y \to x$ quando $t \to +\infty\}$

$W^s(x) = \{y \in X : T(t)y \to x$ quando $t \to +\infty\}$

Sendo x hiperbólico existe uma vizinhança U de x tal que os conjuntos:

$W^u_{loc}(x) = \{y \in W^u(x) : T(-t)y \in U, t \geq 0\}$

$W^s_{loc}(x) = \{y \in W^s(x) : T(x)y \in U, t \geq 0\}$

são subvariedades de X. No caso em que $\dim W^u_{loc}(x) < \infty$ e $\operatorname{codim} W^s_{loc}(x) < \infty$, pelo Teorema 6.1.9 de Henry, tem-se que sendo $T(t)$ injectiva e $DT(t)$ um isomorfismo, então os conjuntos $W^u(x)$, $W^s(x)$ são variedades imersas em X (em geral não são mergulhadas).
Note-se que a verificação das hipóteses em T e DT requerem a utilização de um teorema de unicidade para trás em t (ver Henry, cap.7.3).
Consideram-se em seguida apenas semigrupos $T_\lambda(t)$, $t \geq 0$, possuindo um atractor global A_λ semicontínuo superior em λ na topologia de Hausdorff.
Definição: O semigrupo $T_\lambda(t)$, $t \geq 0$, diz-se **Morse-Smale** se:
1) $T_\lambda(t)$ é injectivo e $DT_\lambda(t)$ é um isomorfismo em A_λ;
2) O conjunto não errante $\Omega(T_\lambda(t))$ é composto de um número finito de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas;
3) As variedades instáveis têm dimensão finita;

4) As variedades estáveis locais e instáveis dos pontos equilíbrio e órbitas periódicas são transversais: $W^s(x) \pitchfork W^u(y)$ para $x, y \in \Omega$;
Nota: Se nesta definição se retirar a condição 2) então obtem-se a definição de sistema de Kupka-Smale.
Para a aplicação de unidade de tempo de fluxo tem-se os seguintes resultados:
Seja $T_\lambda : X \to X$ uma família de aplicações contínuas possuindo um atractor global A_λ semicontínuo superior em λ.
Definição: A aplicação T_λ, diz-se **Morse-Smale** se:
1) T_λ e DT_λ são injectivas em A_λ;
2) $\Omega(T_\lambda)$ é finito (então $\Omega = P$);
3) Todos os pontos periódicos $x \in P$ são hiperbólicos e possuem variedades instáveis de dimensão finita;
4) $W^s(x) \pitchfork W^u(y)$ para $x, y \in P$.
Definição: Diz-se que T_{λ_1} e T_{λ_2} são equivalentes, $T_{\lambda_1} \sim T_{\lambda_2}$, se existe uma conjugação entre $T_{\lambda_1}|_{A_{\lambda_1}}$ e $T_{\lambda_2}|_{A_{\lambda_2}}$, isto é, existe um homeomorfismo $h : A_{\lambda_1} \to A_{\lambda_2}$ tal que $hT_{\lambda_1} = T_{\lambda_2}h$ em A_{λ_1}.
A aplicação T_{λ_0} diz-se A-**estável** se existe uma vizinhança O de λ_0 tal que $T_\lambda \sim T_{\lambda_0}$ para todo $\lambda \in O$.
(19) **Teorema**: (W. Oliva) Se T_λ é Morse-Smale então T_λ é A-estável.
Definição: (Sistema gradiante) Um semigrupo-C^r, $r \geq 1$, $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, diz-se **gradiante** se:
1) Cada semiórbita positiva é pré-compacta;
2) Existe uma função de Liapunov para $T(t)$; isto é, existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ tal que:
a) V é limitado inferiormente;
b) $V(x) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$;
c) $V(T(t)x)$ é não-crescente em t para cada $x \in X$;
d) Se x é tal que $T(t)x$ está definido para $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para $t \in \mathbb{R}$, então $x \in E$.
(20) **Lema**: Se $T(t)$, $t \geq 0$, é um sistema gradiante, então para cada $x \in X$ tem-se que $\omega(x) \in E$. Se $\gamma^-(x)$ é uma semiórbita pré-compacta, então $\alpha(x) \in E$.
Demonstração: Sendo $\gamma^+(x)$ pré-compacta tem-se que $\omega(x)$ é compacto e invariante. Além disso, $\gamma^+(x)$ é pré-compacta e $\{V(T(t)x),\ t \geq 0\}$ limitado inferiormente implica que $V(T(t)x) \to c$, uma constante, quando $t \to +\infty$. Sendo V contínua tem-se que $V(T(t)y) = c$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e $y \in \omega(x) \Rightarrow y \in E$. Sendo $\gamma^-(x)$ pré-compacta e $x \notin E$ tem-se que $\alpha(x)$ é compacta. Se $y \in \alpha(x)$ então existe uma sucessão $t_k \searrow -\infty$ satisfazendo $t_k - t_{k+1} \geq 1$ e tal que $T(t_k)x \to y$. Então para todo $t \in (0, 1)$ tem-se $V(T(t_k)x) \leq V(T(t_k + t)x) \leq V(T(t_{k-1})x)$ para todo o inteiro k e portanto $V(T(t_k)) \to$

$V(y)$ quando $k \to \infty$. Mas como também $V(T(t_k+t)x) \to V(T(t)y)$ obtem-se $V(T(t)y) = V(y)$ para todo o $t \in (0,1)$, e portanto para todo o $t \in \mathbb{R}$. Conclui-se que $y \in E$.

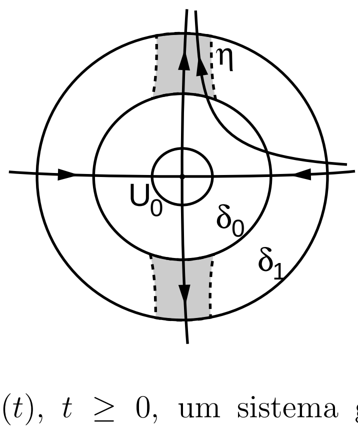
Nota: O sistema gradiante $T(t)$, $t \geq 0$, é dissipativo de pontos se e só se o conjunto E fôr limitado.

(21) **Lema**: Seja $T(t)$, $t \geq 0$, um sistema gradiante tal que $V(T(t)x) < V(x)$ para $t > 0$ e $x \notin E$, e seja $x_0 \in E$ hiperbólico. Então existe uma vizinhança U_0 de x tal que se $x \in U_0 \backslash W^s_{loc}(x_0)$, então existe $t_0 > 0$ tal que $T(t)x \notin U_0$ para todo $t \geq t_0$ (portanto $T(t)x$ sai de U_0 e não volta a entrar).

Demonstração: Seja $\dim W^u(x_0) \geq 1$. Seja $\delta_1 > 0$ tal que se $T(t)x \in B_{\delta_1}(x_0)$ para todo o $t \leq 0$, então $x \in W^u_{loc}(x_0)$. Existem constantes $k, \alpha > 0$ tais que $d(T(t)x, W^u_{loc}(x_0)) \leq Ke^{-\alpha t}$ enquanto $T(t)x \in B_{\delta_1}(x_0)$ fôr satisfeita. Para todo $0 < \delta_0 < \delta_1$ existe $t_2 > 0$ tal que $T(t_2)B_{\delta_0}(x_0) \subset B_{\delta_1}(x_0)$. Seja $W_\eta = \{x : \delta_0 \leq |x - x_0| \leq \delta_1,\ \ d(x, W^u_{loc}(x_0)) < \eta\}$, tomando-se η tal que $\sup\{V(x), x \in W_\eta\} < V(x_0)$, (o que é possível visto que $V(T(t)x) < V(x)$ se $x \notin E$ e $\dim W^u(x_0) \geq 1$). Seja $t_1 > 0$ tal que $Ke^{\alpha t_1} < \eta$ e seja U_0 uma vizinhança de x_0 tal que $T(t)U_0 \subset B_{\delta_0}(x_0)$ para $0 \leq t \leq t_1$. Se $x \in U_0 \backslash W^s_{loc}(x_0)$ então $T(t)x$ eventualmente sai de $B_{\delta_1}(x_0)$ e existem $t_0 > 0$, $\epsilon > 0$ tais que $T(t)x \in \text{cl } B_{\delta_1}(x_0)$ para $0 \leq t \leq t_0$, e $T(t_0+\epsilon)x \notin \text{cl } B_{\delta_1}(x_0)$. Como $t_0 \geq t_1$ tem-se que $T(t_0)x \in W_\eta$ e portanto

$$V(T(t)x) \leq V(T(t_0)x) < \inf\{V(y), y_0 \in U_0\}, \quad t \geq t_0$$

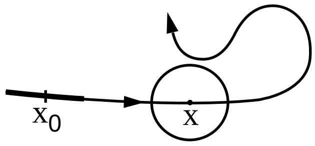
concluindo-se que $T(t)x \notin U_0$ para $t \geq t_0$.

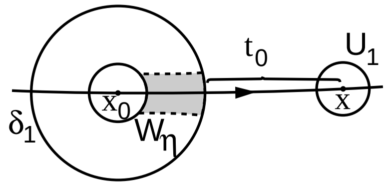


(22) **Teorema**: Seja $T(t)$, $t \geq 0$, um sistema gradiante em X tal que $V(T(t)x) < V(x)$ para $t > 0$ e $x \notin E$. Se $x_0 \in E$ é hiperbólico com $\dim W^u(x_0) < \infty$, $T(t)$ é injectiva em $W^u(x_0)$, e $DT(t)(x)$ um isomorfismo para cada $x \in W^u(x_0)$, então $W^u(x_0)$ é uma subvariedade mergulhada em X.

Demonstração: Já se viu que $W^u(x_0)$ é uma subvariedade imersa. Vai-se mostrar que $W^u(x_0)$ é isomorfica a uma subvariedade mergulhada de X e pelo

Lema (21) basta considerar $W^u_{loc}(x_0)$. Para todo o $x \in W^u(x_0)\backslash W^u_{loc}(x_0)$ existem uma vizinhança U_1 de x e $t_0 > 0$ tais que $W^u(x_0) \cap U_1 \subset T(t_0)W^u_{loc}(x_0)$.





Usando o conjunto W_η e a constante δ_1 do Lema (21) temos que existem $t_1 \geq 0$, $t_0 > 0$ tais que

$$T(-t)x \to x_0 \text{ quando } t \to +\infty \ ,$$

$$|T(-t_1)x - x_0| > \delta_1 \ , \text{ e}$$

$$T(-t_0)x \in W_\eta \cap W^u_{loc}(x_0) = W_1 \ .$$

Como $\dim W^u_{loc}(x_0) < \infty$ tem-se que W_1 é compacto, existe $t_2 > 0$ tal que $\sup\{V(y) : y \in T(t_2)W_1\} < V(x)$ e existe uma vizinhança U_1 de x tal que $\sup\{V(y),\, y \in T(t_2)W_1\} < \inf\{V(y),\, y \in U_1\}$. Se $y \in U_1 \cap W^u(x_0)$ então existe $t_3 > 0$ tal que $T(-t_3)y \in W_1$. Portanto tem-se $t_3 < t_2$ e $U_1 \cap W^u(x_0) \subset T(t_2)W^u_{loc}(x_0)$.

(23) **Teorema**: Se $T(t)$, $t \geq 0$, é gradiante, assimptoticamente regular, e o conjunto E é limitado, então existe um atractor global A (conexo se X fôr um espaço de Banach) para $T(t)$ e

$$A = W^u(E) = \{y \in X : T(-t)y \text{ está definido para } t \geq 0 \text{ e}$$

$$T(-t)y \to E \text{ quando } t \to +\infty\}.$$

Se, além disso, todos os equilíbrios são hiperbólicos, tem-se que o conjunto E é finito e

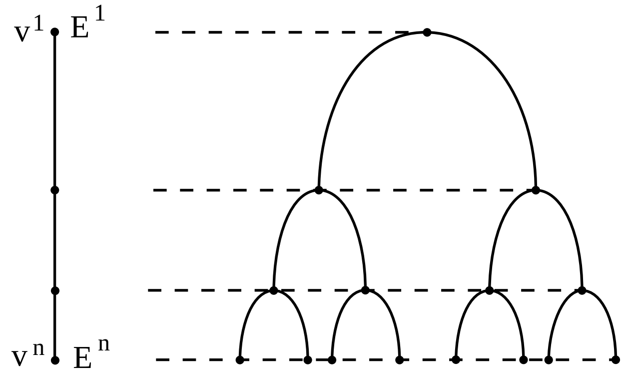
$$A = \bigcup_{x \in E} W^u(x) \ .$$

Demonstração: Sendo $T(t)$ gradiante, o conjunto E limitado e usando o Lema (21) tem-se que $T(t)$ é dissipativo de pontos. Devido à condição b) satisfeita por V tem-se que as órbitas de conjuntos limitados são limitadas. Pelo Teorema (16) obtem-se a existência de um atractor global A. A é compacto e invariante, portanto as órbitas em A são globalmente definidas e limitadas. Pelo Lema (21) tem-se para todo o $x \in A$ que $\alpha(x) \in E$. Conclui-se que $A = W^u(E)$. Sendo todos os pontos de equilíbrio hiperbólicos tem-se que E é finito e portanto $W^u(E) = \bigcup_{x \in E} W^u(x)$.

Decomposição de Morse de A: Seja $E = \{x_1, \ldots, x_N\}$, sendo os equilíbrios x_j todos hiperbólicos e $v^1 > \ldots > v^n$ os distintos valores de $V(x_1), \ldots, V(x_N)$, $(n \leq N)$. Define-se $E^k = \{x \in E : V(x) = v^k\}$. Por c) e d) da definição de sistema gradiante tem-se que os conjuntos $E^1, \ldots, E^n$ formam uma **decomposição de Morse de** A:

1) Cada E^k é compacto, invariante; e

2) Para todo o $x \in A \setminus \bigcup_{j=1}^n E^j$ tem-se que existem $i < l$ tais que $\alpha(x) \in E^i$ e $\omega(x) \in E^l$.



Definem-se:

$$A^k = \bigcup \left\{ W^u(x) : x \in \bigcup_{j=k}^n E^j \right\}$$

$$U^k = \left\{ x \in X : V(x) < v^{k+1} \right\} .$$

Nota: A^k é o atractor compacto de $T(t)|_{U^k}$ visto que para todo o conjunto $B \in X$ tal que $\sup\{V(x) : x \in B\} < v^{k+1}$ tem-se que A^k atrai B sob o fluxo de $T(t)$.

Dependência de parâmetros: Seja Λ um espaço de Banach.

(24) **Teorema**: Se para cada $\lambda \in \Lambda$, $T_\lambda(t)$, $t \geq 0$, é um semigrupo-C^r, $r \geq 1$, gradiante em X, $\{T_\lambda(t), \lambda \in \Lambda\}$ é colectivamente assimptoticamente regular, e $\bigcup\{E_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ é limitado, então o atractor global A_λ existe e é semicontínuo superior em λ.

Nota: Se os equilíbrios em E_λ são hiperbólicos obtem-se também semicontinuidade inferior (Hale e Raugel, 1989).

(25) **Teorema**: Supondo que $T_\lambda(t)$, $t \geq 0$, satisfaz as condições do teorema anterior, sendo U uma vizinhança de A_{λ_0} tal que $T_\lambda(1) \to T_{\lambda_0}(1)$ em $C^r(U, X)$ quando $\lambda \to \lambda_0$, e:

1) $T_\lambda(t)$ é injectiva em A_λ e $DT_\lambda(t)\psi$ é um isomorfismo para $\lambda \in \Lambda$, $\psi \in A_\lambda$;

2) Os equilíbrios em E_{λ_0} são hiperbólicos e tem-se $W^u_{\lambda_0}(x) \pitchfork W^s_{\lambda_0,loc}(y)$ com $\dim W^u_{\lambda_0}(x) < \infty$ para cada $x, y \in E_{\lambda_0}$;

então $T_{\lambda_0}(t)$ é estruturalmente estável.
Demonstração: A_λ é semicontínuo superior em λ_0 e $T_{\lambda_0}(t)$ é Morse-Smale. Então $T_{\lambda_0}(1)$ é Morse-Smale e portanto existe uma conjugação h_λ para os atractores de $T_\lambda(1)$ da qual se obtem um homeomorfismo h_λ para os atractores de $T_\lambda(t)$.

8 - Dimensão do Atractor.

Referência: J. Mallet-Paret, Negatively Invariant Sets of Compact Maps and an Extension of a Theorem of Cartwright, J. Differential Equations, 22, 2 (1976) p.331-348.
Definições: Seja K um espaço topológico.
Dimensão Topológica: dim. É o mínimo inteiro n tal que para toda a cobertura aberta de K existe uma outra cobertura mais fina tal que cada ponto de K pertence quanto muito a $n+1$ abertos da cobertura.
Referência: Dimension Theory, W. Hurewicz e H. Wallman, (Introdução axiomática).
Dimensão de Hausdorff: $\dim_H$. É dada por $\inf\{\alpha : \mu^\alpha(K) = 0\}$ onde $\mu^\alpha(K)$ designa a medida de Hausdorff de dimensão α definida da seguinte forma:

$$\mu^\alpha(K) = \lim_{\epsilon \to 0} \mu^\alpha_\epsilon(K) \text{ onde } \mu^\alpha_\epsilon = \inf_{\mathcal{C}_\epsilon} \sum_i \epsilon_i^\alpha$$

e $\mathcal{C}_\epsilon$ designa o conjunto das coberturas contáveis por bolas abertas $B_{\epsilon_i}(x_i)$ de raio $\epsilon_i < \epsilon$.
Nota: $\mu^\alpha(K) = 0 \Rightarrow \mu^\beta(K) = 0$ se $\beta > \alpha$.
Capacidade limite: c. É definida por $\limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\log n(\epsilon,K)}{\log 1/\epsilon}$ onde $n(\epsilon, K)$ é o mínimo número de bolas abertas de raio ϵ necessárias para cobrir K.
Tem-se a seguinte relação:

$$\dim K \leq \dim_H K \leq \mathrm{c}(K)\ .$$

(26) **Teorema**: Se $T(t)$, $t \geq 0$, é assimptoticamente regular, dissipativo para pontos, e as órbitas de conjuntos limitados são limitadas, então o atractor global tem capacidade finita: $\mathrm{c}(A) < +\infty$.
Resultados de Mallet-Paret:
(27) **Teorema**: Seja H um espaço de Hilbert separável, Γ um conjunto compacto, U um conjunto aberto tal que $\Gamma \subset U \subset H$, e seja $T : U \to H$ uma aplicação de classe C^1 negativamente invariante (isto é $\Gamma \subset T\Gamma$). Se existe um subespaço linear $C \subset H$ tal que $\|DT(x)|_C\| < 1$ para $x \in \Gamma$ e codim $C < +\infty$ então $\dim \Gamma < +\infty$.
Demonstração: A ideia principal é a seguinte. A contracção em C obriga a que $\mu^N_{\alpha\delta}(\Gamma) \leq \beta\mu^N_\delta(\Gamma)$ com $\alpha, \beta < 1$. Iterando ($\beta^n \to 0$) obtem-se $\mu^N_\delta(\Gamma) = 0$.

Notas:
1) As variedades instáveis para os sistemas de Morse-Smale têm dimensão finita.
2) É natural fazer aqui uma referência às Variedades Inerciais.

II - Aplicações e Exemplos

1 - Equações de Evolução Sectoriais.

Pretende-se aqui considerar problemas da forma

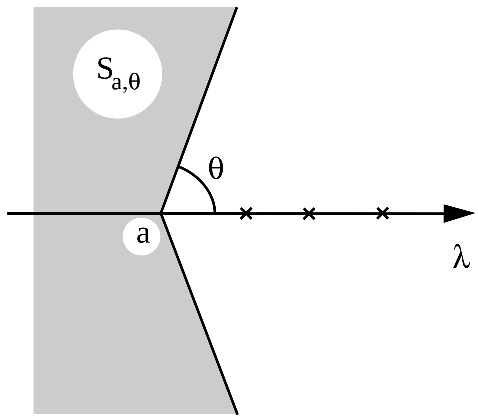
$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(x) \ \ , \ \ t > 0; \ \ x(0) = x_0$$

onde $x \in X$ e A é um operador sectorial linear em X.
Definição: O operador linear A definido no espaço de Banach X diz-se **sectorial** se fôr um operador fechado com o domínio denso em X, e tal que existem constantes $\theta \in (0, \pi/2), M \geq 1, a \in \mathbb{R}$ tais que

$$S_{a,\theta} = \{\lambda : \theta \leq |\arg\ (\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \in \rho(A)$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \text{ para todo } \lambda \in S_{a,\theta}$$

onde $S_{a,\theta}$ designa o sector em A de abertura θ e $\rho(A)$ designa o conjunto resolvente de A.



Exemplos:
1) Sendo A linear contínuo em X tem-se que A é sectorial. Na verdade, sendo A limitado tem-se que $|\sigma(A)| \leq \|A\|$ e tomando $|\lambda| > 2\|A\|$ obtem-se $(A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(A/\lambda)^k$ de onde se conclui que $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{2}{|\lambda|}$.

2) Sendo A autoadjunto com domínio denso no espaço de Hilbert X e A limitado inferiormente tem-se que A é sectorial. O espectro $\sigma(A)$ é real e só contem valores próprios generalizados. A limitado inferiormente significa que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(Ax, x) \geq \lambda_0 \|x\|^2$ (A diz-se positivo se $\lambda_0 = 0$). Portanto se $\lambda < \lambda_0$ tem-se que $((A - \lambda I)x, x) \geq (\lambda_0 - \lambda)\|x\|^2$. (Por translacção toma-se $\lambda_0 = 0$). Conclui-se que $(A - \lambda I)^{-1}$ existe porque $A - \lambda I$ é injectiva. Assim $\lambda \in \rho(A)$. Finalmente, da relação $((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x)= (Ax, Ax) + \lambda^2(x, x) - 2\lambda(Ax, x)$ obtem-se $\|(A - \lambda I)x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2$ e portanto $\|(A - \lambda I)^{-1}x\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|x\|$ para todo o x no domínio de A que é denso em X.
3) Sendo A tal que $Au = -\Delta u$ para $u = u(x) \in C_0^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e tomando o fecho em $L^p(\Omega)$ de $(-\Delta)|_{C_0^2(\Omega)}(1 \leq p < \infty)$ então tem-se que A é sectorial se o resolvente contem o semiplano esquerdo em $\mathbb{C}$. Consultar Henry (p.32) e Pazy (p.208). Em L^2 este resultado segue do exemplo anterior.
Definições: O semigrupo $T(t), t \geq 0$, diz-se um **semigrupo-C_0** (ou fortemente contínuo) se satisfaz:
(i) $T(t)$, $t \geq 0$, é um semigrupo de operadores lineares contínuos;
(ii) $\lim_{t\searrow 0^+} T(t)x = x$ para todo o $x \in X$.
O semigrupo diz-se **analítico** se além disto satisfaz ainda:
(iii) A aplicação $t \mapsto T(t)x$ é real analítica para $t \in (0, \infty)$ e cada $x \in X$.
O semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$, diz-se ainda uma **contracção** se $\|T(t)\| \leq 1$.
Define-se o seu **gerador infinitesimal** A tomando:

$$D(A) = \left\{ x \in X : \text{ existe o } \lim_{t\searrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}$$

$$Ax = \lim_{t\searrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ para } x \in D(A) .$$

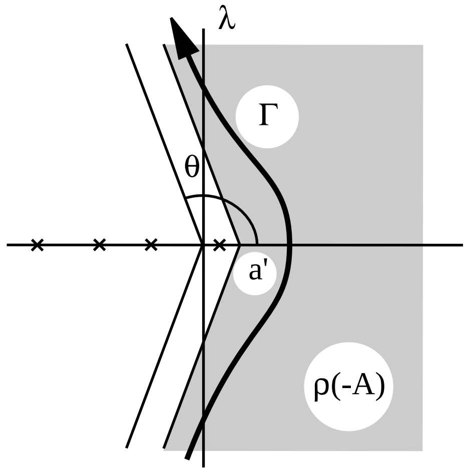
(1) **Teorema** (Hille-Yosida): O operador A linear é o gerador infinitésimal de um semigrupo C_0 de contracções $T(t)$, $t \geq 0$, se e só se:
(1) A é fechado e o seu domínio é denso;
(2) O resolvente $\rho(A)$ contem $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} .$$

(2) **Teorema**: Sendo A sectorial, $-A$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$, com

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda ,$$

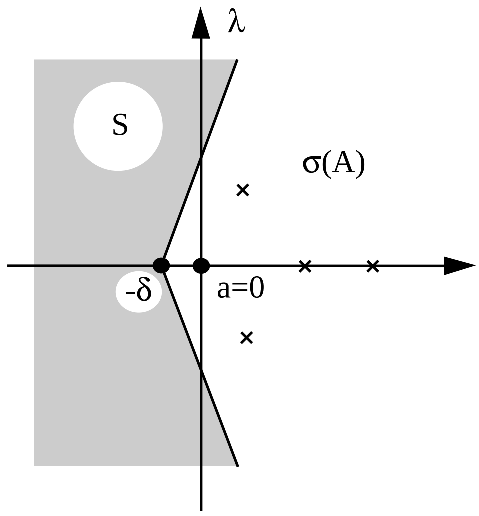
onde Γ é uma curva contida no sector da figura.

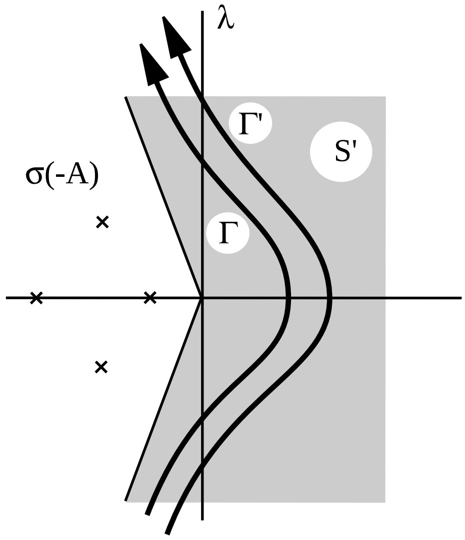


Se Re $\sigma(A) > a$, tem-se as seguintes estimativas $\|e^{-At}\| \leq ce^{-at}$, $\|Ae^{-At}\| \leq \frac{c}{t}e^{-at}$. Finalmente, é satisfeita a seguinte relação

$$\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At},\ t > 0\ .$$

Demonstração: Toma-se $a = 0$





Sendo A sectorial tem-se $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$, para $\lambda \in S$ e portanto $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ para $-\lambda \in S'$. Então define-se $e^{-At} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$ sendo o integral absolutamente convergente para $t > 0$. Pode-se ainda transladar $\Gamma \mapsto \Gamma'$ (para a direita) sem alterar o valor do integral. Então:

$$e^{-At}e^{-As} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} e^{\lambda t}(\lambda I + A)^{-1}e^{\mu s}(\mu I + A)^{-1} d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s}\frac{1}{\mu - \lambda}\Big[(\lambda I + A)^{-1} - (\mu I + A)^{-1}\Big] d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left\{\int_\Gamma e^{\lambda t}\underbrace{\int_{\Gamma'} e^{\mu s}\frac{1}{\mu - \lambda}\,d\mu}_{2\pi i\ e^{\lambda s}}\,(\lambda I + A)^{-1}d\lambda - \int_{\Gamma'} e^{\mu s}\underbrace{\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}d\lambda}_{0}\,(\mu I + A)^{-1}d\mu\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)}\int_\Gamma e^{\lambda(t+s)}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda = e^{-A(t+s)}$$

obtendo-se a propriedade de semigrupo. Tomando $\mu = \lambda t$, $t > 0$:

$$\|e^{-At}\| \;=\; \|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\frac{\mu}{t}I + A)^{-1}e^{\mu}\frac{d\mu}{t}\| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}M\int_\Gamma |e^{\mu}|\frac{|d\mu|}{|\mu|} = c$$

seguindo-se que o semigrupo é contínuo, e:

$$\|Ae^{-At}\| \;=\; \|\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma A\left(\frac{\mu}{t}I + A\right)^{-1}e^{\mu}\,\frac{d\mu}{t}\| \;=\; \frac{1}{2\pi}\|\int_\Gamma\Big[I - \frac{\mu}{t}\Big(\frac{\mu}{t}I + A\Big)^{-1}\Big]\;e^{\mu}\,\frac{d\mu}{t}\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left\{\| \int_\Gamma e^\mu \frac{d\mu}{t}\| + \| \int_\Gamma M e^\mu \frac{d\mu}{t}\|\right\} = \frac{M+1}{2\pi}\,\frac{1}{t}\int_\Gamma |e^\mu||d\mu| = \frac{c}{t}$$

correspondendo à propriedade de regularização do semigrupo. Seguidamente mostra-se que $e^{-At}x \to x$ quando $t \searrow 0^+$ para $x \in X$. Seja $x \in D(A)$, que é denso em X. Então, para $t > 0$:

$$e^{-At}x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\Big[(\lambda I + A)^{-1} - \lambda^{-1}\Big]\, x\, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t} A(\lambda I + A)^{-1}\lambda^{-1}\, x\, d\lambda$$

e portanto

$$\|e^{-At}x - x\| \leq \frac{1}{2\pi}\,\|Ax\|\; |\int_\Gamma \frac{M}{|\lambda|} e^{\lambda t}\lambda^{-1} d\lambda\,|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\|Ax\|\, M\int_\Gamma |e^\mu| \frac{1}{|\mu|^2}|d\mu| \cdot t \to 0$$

Assim, $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo-C_0 (e pode estender-se analiticamente a $t \in V$, um sector aberto contendo o semieixo real). Finalmente, para $x \in D(A)$

$$\frac{d}{dt}e^{-At}x + Ae^{-At}x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I + A)\, e^{\lambda t}\, (\lambda I + A)^{-1} x\, d\lambda = 0$$

podendo portanto escrever-se $\frac{d}{dt}e^{-At} = -Ae^{-At} = e^{-At}A$, e obtem-se ainda (após uma mudança de variável $s \mapsto st$)

$$\frac{1}{t}(e^{-At}x - x) = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-As}Ax\, ds \to -Ax$$

quando $t \searrow 0^+$, porque e^{-At} é linear contínuo. Portanto $-A$ coincide com o gerador infinitesimal G do semigrupo em $D(A)$. Falta mostrar que $D(G) \subset D(A)$:
1- $\|Ae^{-At}\| \leq \frac{c}{t} \Rightarrow \forall x \in X,\ e^{-At}x \in D(A)$ para $t > 0$;
2- Seja $\mathcal{L}(\lambda)x \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-At}x\, dt$; Então para $\delta > 0$

$$A\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}e^{-At}x\, dt = -\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}e^{-At}x\, dt = e^{-\lambda\delta}e^{-A\delta}x - \lambda\int_\delta^\infty e^{-\lambda t}e^{-At}x\, dt\,.$$

Como A é fechado, após tomar o limite $\delta \searrow 0^+$, obtem-se $A\mathcal{L}(\lambda)x = x - \lambda\mathcal{L}(\lambda)x$, e portanto $(A + \lambda I)\mathcal{L}(\lambda)x = x$ concluindo-se que $\mathcal{L}(\lambda)x \in D(A) \subset D(G)$ para todo $\lambda \geq 0$ e $x \in X$.
3- Para todo $x \in D(G)$ tem-se $e^{-At}x \in D(G)$ para $t \geq 0$ e $Ge^{-At}x = \frac{d}{dt}e^{-At}x = e^{-At}Gx$. Como anteriormente $\mathcal{L}(\lambda)(\lambda I - G)x = x$ para $x \in D(G)$ e

assim, designando por Rg o contradomínio de um operador obtem-se $D(G) \subset \mathrm{Rg}(\mathcal{L}(\lambda)) \subset D(A)$ e portanto $G = -A$. Assim $D(A) \subset X$ e por interpolação obtem-se uma família de subespaços $X^\mu \hookrightarrow X$ nos quais se pode obter o problema bem posto e ter o semigrupo gerado assimptoticamente regular.
Nota: Se o resolvente de A é compacto, então e^{-tA} é compacto para $t > 0$.

2 - Potências Fraccionárias.

Dado um operador A sectorial em X tal que Re $\sigma(A) > 0$ então A^{-1} existe e é linear contínuo. Pode então fácilmente definir-se $A^{-\alpha}$:
Definição: Sendo A sectorial, Re $\sigma(A) > 0$ e $\alpha > 0$, define-se:

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt \ ;$$

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1} \ , \ D(A^\alpha) = \mathrm{Rg}(A^{-\alpha}) \ ;$$

$$A^0 = I \in X \ .$$

(3) **Teorema**: Se A é sectorial num domínio contido em $X, \alpha > 0$ e Re $\sigma(A) > 0$, então $A^{-\alpha}$ é linear, contínuo em X, injectivo e satisfaz $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ com $\alpha, \beta > 0$. Além disso, para $0 < \alpha < 1$ tem-se:

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda I + A)^{-1} d\lambda \ .$$

Demonstração: Dado $\delta > 0$ tal que Re $\sigma(A) > \delta$ tem-se que $\|e^{-At}\| \leq ce^{-\delta t}$ para $t > 0$ e portanto $\|A^{-\alpha}x\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} c \ e^{-\delta t} dt \ \|x\|$ concluindo-se que $A^{-\alpha}$ é contínuo. Sendo $-A^{-\alpha}x = 0$ tem-se que para $n > \alpha, A^{-n}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = 0$ e portanto $x = 0$ visto que A^{-1} é injectiva. Por cálculo directo:

$$A^{-\alpha}A^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-A(t+s)} ds \ dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \int_t^\infty t^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} e^{-Au} du \ dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty du \int_0^u t^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} e^{-Au} dt$$

$$= \int_0^1 u^{\alpha+\beta-2} v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} u \ dv = u^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-Au} du = A^{-(\alpha+\beta)} \ .$$

Da identidade $(\lambda I + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} dt$ válida para $\lambda \geq 0$ obtem-se:

$$\int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda I + A)^{-1} d\lambda = \int_0^\infty e^{-At} (\int_0^\infty \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t} d\lambda)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-At} t^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) dt = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} A^{-\alpha}$$

visto que $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ para $0 < \alpha < 1$.
Notas: Se o resolvente de A é compacto, então $A^{-\alpha}$ é compacto para $\alpha > 0$.
O operador A^α é fechado. Na verdade tem-se que $0 \in \rho(A^\alpha)$ visto A^α ser invertível (Pazy, Teorema 6.8, p.72).
Para $\alpha \geq \beta > 0$ tem-se que $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ visto que $A^{-\alpha} = A^{-\beta} A^{-(\alpha-\beta)}$ e portanto $\text{Rg}(A^{-\alpha}) \subset \text{Rg}(A^{-\beta})$
Para todo $\alpha \geq 0$ tem-se que $\overline{D(A^\alpha)} = X$ visto que $D(A) \subset D(A^\alpha)$
Para α, β reais tem-se que $A^{\alpha+\beta} x = A^\alpha A^\beta x$ para todo o $x \in D(A^\gamma)$ onde $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.
Tem-se ainda a seguinte interpolação (Pazy, Teorema 6.10, p.73): $\|A^\alpha x\| \leq c\|x\|^{1-\alpha} \|Ax\|^\alpha$.
(4) **Teorema**: Sendo A sectorial e $\text{Re}\, \sigma(A) > \delta > 0$, então para $\alpha \geq 0$ existe $c_\alpha < +\infty$ tal que

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq c_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \;\; t > 0 \;,$$

e se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^\alpha)$ tem-se:

$$\|(e^{-At} - I)x\| \leq \frac{1}{\alpha}\, c_{1-\alpha}\;\, t^\alpha \;\|A^\alpha x\|$$

onde c_α é limitada em intervalos compactos de $[0, \infty)$.
Demonstração: Para $0 < \alpha < 1$ e $t > 0$ tem-se:

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \;=\; \|A^{-(1-\alpha)} A e^{-At}\| \;=\; \|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-As} A e^{-At} ds\|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} \|Ae^{-A(s+t)}\|\; ds \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} \frac{c}{(s+t)} e^{-\delta(s+t)} ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\, t^{-\alpha} e^{-\delta t} \int_0^\infty u^{-\alpha} \frac{c}{(1+u)t}\; e^{-\delta t u}\; t\; du = c_\alpha t^{-\alpha} \;.$$

Definição: Sendo A sectorial no espaço de Banach X e $\alpha \geq 0$ define-se:

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha) \;\;,\;\; \|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|, \;\; x \in X^\alpha$$

onde $A_1 = A + aI$ com a tal que $\text{Re}\, \sigma(A_1) > 0$.

Nota: Os espaços X^α são espaços de Banach. Sejam $A_1 = A + aI$, $A_2 = A + bI$, com Re $\sigma(A_i) > 0$ e $\|x\|_{\alpha,i} = \|A_i^\alpha x\|$, $i = 1, 2$. Então tem-se a equivalência das normas $\|\cdot\|_{\alpha,i}$:

$$\|A_1^\alpha A_2^{-\alpha} x\| \leq k_1 \|x\| \Rightarrow \|A_1^\alpha y\| \leq k_1 \|A_2^\alpha y\|$$

$$\|A_2^\alpha A_1^{-\alpha} x\| \leq k_2 \|x\| \Rightarrow \|A_2^\alpha y\| \leq k_2 \|A_1^\alpha y\|$$

visto que $A_1^\alpha A_2^{-\alpha}$ e $A_2^\alpha A_1^{-\alpha}$ são limitados em X; (ver Henry, p.28):

$$A_1^\alpha A_2^{-\alpha} = A_1^\alpha (A_2^{-\alpha} - A_1^{-\alpha}) + I$$

$$A_2^{-\alpha} - A_1^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda I + A_1)^{-1} (A_1 - A_2)(\lambda I + A_2)^{-1} d\lambda \ ;$$

mas então $A_1 - A_2 = (a - b)I$ e pode utilizar-se a estimativa:

$$\|A_i^\beta (\lambda I + A_i)^{-1}\| \leq c|\lambda|^{\beta - 1}, \ \ 0 \leq \beta \leq 1 \ .$$

(5) **Teorema**: Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto limitado com $\partial\Omega$ uma variedade de classe C^m separando $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ de Ω, e se A é sectorial em $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, com $D(A) = X^1 \subset W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$, então para $0 \leq \alpha \leq 1$ tem-se:

$$X^\alpha \subset W^{k,q}(\Omega) \ \text{ para } \ m\alpha > k + \frac{n}{p} - \frac{n}{q}, \ \ q \geq p$$

$$X^\alpha \subset C^\nu(\Omega) \ \text{ para } \ m\alpha > \nu + \frac{n}{p}, \ \ \nu \ \geq 0 \ .$$

Demonstração: Utilizam-se as desigualdades (a) e (b) de Nirenberg-Gagliardo que se apresentam seguidamente (Henry, p.37, Friedman, Partial Differential Equations, p.27):

(a) $\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} \leq c \ \|u\|^\theta_{W^{m,p}(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^p(\Omega)}$,

se $0 \leq \theta \leq 1$, $k - \frac{n}{q} < \theta(m - \frac{n}{p}) - (1-\theta)\frac{n}{p} = m\theta - \frac{n}{p}$, e $q \geq p$. Então para $u \in D(A)$ obtem-se

$$\|u\|_{W^{k,q}} \leq c\|Au\|^\theta_{L^p} \|u\|^{1-\theta}_{L^p}$$

e a inclusão $D(A) \subset W^{m,p} \hookrightarrow W^{k,q}$ estende-se a uma inclusão contínua de $X^\alpha \hookrightarrow W^{k,q}$ para $\alpha > \theta$ (Henry, p.28).

Procede-se igualmente para o segundo caso:

(b) $\|u\|_{c^\nu(\Omega)} \leq c \ \|u\|^\theta_{W^{m,p}(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^p(\Omega)}$

se $0 \leq \theta \leq 1$ e $0 \leq \nu \leq \theta(m - \frac{n}{p}1 - (1-\theta)n = m\theta - \frac{n}{p}$.

Exemplo: Sendo $A = -\Delta_D$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com condições de fronteira de Dirichelet então A é sectorial em $X = L^2(\Omega)$ com $D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$X^\alpha \subset C^\nu(\Omega)$ para $\alpha > 3/4, \nu < (4\alpha - 3)/2$;
$X^\alpha \subset W^{1,q}(\Omega)$ para $\alpha > 1/2, \frac{1}{q} > (5 - 4\alpha)/6$;
$X^\alpha \subset L^q(\Omega)$ para $\frac{1}{q} > (3 - 4\alpha)/6$.

Nota: Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n > 3$ é necessário escolher $X = L^p(\Omega)$ com $p > 2$ para se obter uma regularização num espaço de funções contínuas $X^\alpha \subset C^\nu(\Omega)$.