INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Química
Licenciatura em Engenharia Biológica
Ano Lectivo: 2003/2004

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Exame de 19 de Janeiro de 2004

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere o polinómio do 3º grau

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3.$$

(a)^{20} Mostre que o polinómio p tem uma única raiz real e determine um intervalo $[a, b]$, $0 < a < b$, onde se localiza a raiz.

(b)^{20} Utilize o método de Newton para obter um valor aproximado da raiz real de p com um erro absoluto inferior a 0.01.

(c)^{20} Diga justificadamente qual das seguintes duas funções, definidas para $x > 0$,

$$g_1(x) = 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}, \qquad g_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1 - \frac{3}{x}\right),$$

pode ser utilizada para obter a raiz real de p pelo método do ponto fixo.

[**2**] Considere o sistema de equações $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, onde

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 3+\varepsilon & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 \\ 3+\varepsilon \end{bmatrix},$$

e $\varepsilon \in [0,\ 0.01[$ é um parâmetro real.

(a)^{20} Sabendo que o sistema $A_0 x_0 = b_0$ tem a solução $x_0 = [-1\ \ 2]^T$, determine, sem resolver o sistema $A_\varepsilon x_\varepsilon = b_\varepsilon$, um majorante para a diferença $x_\varepsilon - x_0$ expresso em termos do parâmetro ε.

Nota. Use a norma do máximo e a norma matricial associada.

(b)^{20} Suponha que pretendia resolver o sistema $A_0 x = b$, onde b é um vector arbitrário, pelo método de Jacobi modificado com parâmetro real ω. Determine: (i) o intervalo de valores de ω para os quais o método converge para a solução do sistema para qualquer valor inicial; (ii) o valor de ω para o qual o método converge mais rapidamente.

[3] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	1	16

(a)^{15} Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Newton às diferenças divididas.

(b)^{15} Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela pela fórmula de Lagrange.

(c)^{10} Mostre que

$$\max_{x\in[-1,2]} \left| x(x-2)(x^2-1) \right| = 1.$$

Sugestão: Introduza a mudança de variável $x = \theta + \frac{1}{2}$.

(d)^{10} Sabendo que $|f^{(4)}(x)| \leq 24, \quad \forall x \in [-1,2]$, obtenha um majorante para o erro

$$e_3(x) = f(x) - p_3(x),$$

válido para todos os valores de $x \in [-1,2]$.

[4]^{20} Sabendo que o erro de integração da regra de Simpson para o cálculo do integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

de uma função $f \in C^4([a,b])$ é da forma

$$E_2(f) = K f^{(4)}(\xi),$$

onde K é uma constante independente de f, e $\xi \in (a,b)$, determine K.

[5] Considere o sistema de duas equações diferenciais não-lineares de 1ª ordem,

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)(1 - z(x)), \\ z'(x) = z(x)(y(x) - 1), \qquad x \geq 0, \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais

$$\begin{cases} y(0) = \alpha, \\ z(0) = \beta, \qquad \alpha, \beta \in (0, \infty), \quad |\alpha - 1| + |\beta - 1| \neq 0. \end{cases}$$

(a)^{15} Obtenha valores aproximados (y_2, z_2) para $(y(2h), z(2h))$ usando dois passos do método de Euler com passo de integração $h > 0$.

(b)^{15} Obtenha valores aproximados $(\tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$ para $(y(2h), z(2h))$ usando um só passo do método de Euler modificado com passo de integração $2h$.

Nota. Os resultados vêm expressos em termos de α, β, h.