INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Química
Licenciatura em Engenharia Biológica
Ano Lectivo: 2003/2004

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Exame de 4 de Fevereiro de 2004

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[**1**] Considere os números reais

$$a = \pi, \qquad b = \frac{2199}{700}, \qquad c = \frac{a-b}{a+b}.$$

(a)^{10} Supondo o cálculo efectuado num sistema de ponto flutuante com seis algarismos de mantissa e arredondamento simétrico determine o valor aproximado $\tilde{c}$ de c e o seu erro relativo em relação ao valor exacto $c = 0.261151690\ldots \times 10^{-4}$.

(b)^{10} Supondo que são apenas conhecidos valores aproximados $\tilde{a}, \tilde{b}$ de a, b, e que as três operações aritméticas envolvidas no cálculo de c, adição, subtracção e divisão, têm erros de arredondamento $\delta_A, \delta_S, \delta_D$, respectivamente, determine a expressão do erro relativo do valor aproximado $\tilde{c}$ de c.

[**2**] Considere a equação

$$x^4 - 3 = 0.$$

(a)^{15} Mostre que o método da secante com iteradas iniciais $x_{-1} \neq x_0$ no intervalo $I = [1, 2]$ converge para a única raiz real positiva da equação.

(b)^{25} Utilize o método da secante para obter um valor aproximado desta raiz com um erro absoluto inferior a 0.01.

[**3**] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x), \tag{S}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{1}{2}\cos(x_1 + x_2) - 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}\sin(x_1 + x_2) - 2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}\cos(x_1 + x_2) \\ 2 + \frac{1}{3}\sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}.$$

(a)^{15} Mostre que o sistema (S) tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right],$$

e que esta é também a única raiz de (S) em $\mathbb{R}^2$.

v.s.f.f.

(b)[25] Obtenha um valor aproximado $x^{(1)}$ para a solução única z do sistema (S) usando uma iterada do método de Newton generalizado partindo da condição inicial $x^{(0)} = [1\ 2]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(1)}\|_1$.
Nota. Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema linear que ocorre na aplicação do método de Newton generalizado.

[**4**] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	-1.909	-0.841	1.000	2.841	3.909

(a)[20] Determine o polinómio interpolador p de menor grau que interpola f nos pontos x_0, x_2, x_4.

(b)[20] Determine o polinómio do primeiro grau q que melhor aproxima f nos cinco pontos da tabela no sentido em que é mínimo o erro quadrático médio definido por

$$Q(f, q) = \frac{1}{5}\sqrt{\langle q - f, q - f\rangle},$$

onde o produto interno $\langle g, h\rangle$ de duas funções $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\langle g, h\rangle = \sum_{i=0}^{4} g(x_i)h(x_i).$$

[**5**] Sendo $f \in C([a, b])$, considere o integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} x f(x)\, dx.$$

(a)[25] Determine a fórmula de quadratura de Gauss com dois nós de integração que aproxima o integral.

(b)[10] Diga justificadamente qual o grau de precisão da fórmula assim obtida.

[**6**][25] Considere o sistema de duas equações diferenciais não-lineares de 1ª ordem,

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)y(t), \\ y'(t) = [x(t)]^2, \end{cases} \qquad t \geq 0,$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = 1,\ y(0) = 0$. Obtenha valores aproximados (x_1, y_1) para $(x(h), y(h))$ usando um passo do método de Runge-Kutta clássico de 4ª ordem com passo de integração $h > 0$.
Nota. Os resultados vêm expressos em termos de h.