INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Ano Lectivo: 2003/2004

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

1.1. Represente x em vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos:

a) $x = 1/6$; **b)** $x = 1/3$; **c)** $x = -83784$;

d) $x = -83785$; **e)** $x = 83798$: **f)** $x = 0.0013296$.

1.2. Tomaram-se para valores aproximados de

$$x = 0.3000 \times 10^{-3}, \qquad y = 0.3000 \times 10^{1}, \qquad z = 0.3000 \times 10^{4},$$

respectivamente os valores

$$\tilde{x} = 0.3100 \times 10^{-3}, \qquad \tilde{y} = 0.3100 \times 10^{1}, \qquad \tilde{z} = 0.3100 \times 10^{4}.$$

Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.

1.3. Considere os números $x = \pi$ e $y = 2199/700$.

a) Pretendem-se aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de x e y, respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda $\tilde{x} - \tilde{y}$.

b) Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e de $\tilde{x} - \tilde{y}$, bem como as percentagens de erro. Comente.

c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em vírgula flutuante com 6 algarismos na mantissa os números x e y. Determine $fl(fl(x) - fl(y))$ e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação à alínea b)?

1.4. Determine o erro absoluto cometido no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema de vírgula flutuante com mantissa de comprimento 6.

1.5. Sendo x e y números positivos considerados num sistema de vírgula flutuante decimal tais qye $x > y$ e

$$10^{-q} \leq 1 - \frac{y}{x} \leq 10^{-q},$$

mostre que pelo menos p e no máximo q dígitos significativos são perdidos ao efectuar a diferença $x - y$.

1.6. Considere os valores

$$A = 0.492, \quad B = 0.603, \quad C = -0.494, \quad D = -0.602, \quad E = 10^{-5}$$

Com a finalidade de calcular

$$F = \frac{A + B + C + D}{E},$$

dois indivíduos, usando uma máquina com três dígitos na mantissa e com arredondamento simétrico, efectuaram esse cálculo de forma distinta, mas aritmeticamente equivalente.

O indivíduo X calculou $A + B$, depois $C + D$, somou os valores, e dividiu por E, obtendo $F = 0$.

Por seu turno, indivíduo Y calculou $A+C$, depois $B+D$, somou os valores, e dividiu por E, obtendo $F = -100$.

Verifique os cálculos efectuados pelos dois indivíduos e comente a disparidade de resultados obtidos, atendendo a que se usaram processos matematicamente equivalentes.

1.7. Considere os valores

$$x = 0.100456683, \qquad y = 0.0995214437.$$

Determine o número de algarismos significativos que se pode garantir a

$$xy, \qquad x/y, \qquad x + y, \qquad x - y,$$

ao efectuar as operações num sistema de vírgula flutuante VF(10,7,-38,38) com arredondamento simétrico.

1.8. Considere um sistema de vírgula flutuante VF(10,7,-38,38) com arredondamento simétrico. Sendo $u = 0.5 \times 10^{-6}$ a unidade de arredondamento do sistema e $v = 0.9u$ calcule $fl(1 + u)$ e $fl(1 + v)$.

1.9. Mostre que, usando a aproximação

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

se têm as seguintes estimativas para o erro absoluto e relativo:

$$\left|e_{\cos(x)}\right| \leq \frac{1}{2880} \approx 0.35 \times 10^{-3}, \qquad \left|\delta_{\cos(x)}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2880},$$

para qualquer $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

1.10. Considere a função real de variável real

$$f(x) = 1 - \cos x.$$

a) Determine para que valores de x o cálculo de $f(x)$ conduz a um problema mal condicionado.

b) Considere o seguinte algoritmo para o cálculo de f:

$$z_1 = \cos x; \qquad z_2 = 1 - z_1.$$

Mostre que o algoritmo é instável para $x \approx 0$ (apesar de o problema ser bem condicionado).

c) Baseado na fórmula $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ proponha um algoritmo equivalente que seja numericamente estável para $x \approx 0$.

1.11. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

a) Calcule $f\left(10^{-6}\right)$ usando a fórmula anterior.

b) Obtenha uma aproximação de $f\left(10^{-6}\right)$ usando o desenvolvimento de f em série de Taylor em torno de $x = 0$.

c) Sabendo que $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$, calcule $f\left(10^{-6}\right)$ usando uma nova fórmula para f.

d) Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

1.12. Sejam $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ valores aproximados de x, y, z, respectivamente, com erros relativos $\delta_{\tilde{x}}, \delta_{\tilde{y}}, \delta_{\tilde{z}}$. Determine uma estimativa do erro relativo cometido no cálculo de $v = xy + z$ num computador com unidade de arredondamento u e usando os valores aproximados.

1.13. Considere o cálculo de

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

que pode ser feito usando três algoritmos diferentes:

$$w_1 = x \times x - y \times y$$
$$w_2 = (x + y) \times (x - y)$$
$$w_3 = (x + y) \times x - (x + y) \times y.$$

a) Determine as expressões dos erros relativos dos três algoritmos.

b) Supondo que x e y são representados exactamente no computador, determine para cada algoritmo condições para as quais este algoritmo é melhor do que os outros.

1.14. Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de vírgula flutuante VF(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de x muito grandes o erro relativo era também muito grande.

a) Verifique que o erro relativo é 100% para $x = 2000$. Qual o valor do erro relativo para valores de x ainda maiores?

b) Qual a razão desse error relativo grande: o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular $f(x)$ que não apresente erros relativos tão grandes.

1.15. Considere a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

e suponha que todos os coeficientes são positivos e exactos e tais que $b^2 \gg ac$. Como é sabido as duas raízes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Faça $a = 1,\ b = 62.10,\ c = 1$. A equação correspondente tem raízes $x_1 \approx -0.01610723$ e $x_2 \approx -62.08390$. Usando aritmética de vírgula flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, obtenha aproximações para x_1 e x_2. Dê uma explicação para o mau valor que obteve para x_1 e proponha uma maneira alternativa de calcular essa raiz.

1.16. Sabendo que $\cos(x_k)$ para $k = 1, \ldots, 20$ é calculado com um erro relativo inferior a 10^{-6}, indique uma estimativa para o erro relativo de

$$P = \prod_{k=1}^{20} \cos(x_k)$$

baseando-se nas fórmulas obtidas para a propagação do erro relativo em funções.

1.17. Determine uma função f que verifique

$$\tilde{\delta}_f(x) = xe^{-x}\delta_{\tilde{x}}.$$

1.18. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 10^{-6} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

a) Resolva o sistema pelo método da eliminação de Gauss.

b) Suponha que o sistema é resolvido numa calculadora onde os números são representados num sistema de vírgula flutuante, apenas com 6 dígitos na mantissa. Que solução obteria nesse caso? Compare com a solução exacta.

c) Suponha que o sistema é resolvido na mesma máquina, mas usando pesquisa parcial de pivot. Qual é o resultado nestas condições? Compare com o resultado da alínea anterior e comente.

1.19. Considere o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 10^6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \times 10^6 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

a) Verifique que este sistema é equivalente ao do exercício anterior.

b) Será que, neste caso, a pesquisa parcial de pivot permite superar os efeitos dos erros de arredondamento, como acontecia no exercício anterior? Justifique.

c) Resolva o sistema, utilizando o método da pesquisa total de pivot. Comente.

1.20. Devido ao uso de aritmética não exacta, o método de eliminação de Gauss pode conduzir a soluções totalmente erradas. Como exemplo, considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{bmatrix},$$

com solução exacta $x = 10.00$ e $y = 1.000$. Suponha que efectua os cáculos no sistema VF(10, 4, -10, 10), com arredondamento simétrico. Compare os resultados obtidos pelo método de eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot.

1.21. Considere os seguintes dois sistemas de equações equivalentes:

$$\begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 20000 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10000 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supondo que efectua os cáculos no sistema decimal com 4 dígitos, analise as vantagens da selecção de pivot na resolução de cada um dos sistemas. Qual o tipo de selecção que deveria utilizar em cada um dos casos?

1.22. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Representando os números com seis dígitos na mantissa, resolva este sistema pelo método da eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot. Compare os resultados e comente.