

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica  
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial  
Ano Lectivo: 2003/2004

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

5.1. Considere a matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Mostre que

$$\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

5.2. Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_M$  valores reais distintos e  $f_1, f_2, \dots, f_M$  os correspondentes valores de uma função  $f$  nesses pontos. Prove que existe uma única função  $F_M$  da forma

$$F_M(x) = \sum_{j=1}^M c_j e^{jx},$$

para a qual se tem  $F_M(x_i) = f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ .

5.3. Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$  pontos distintos de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e sejam  $l_0, l_1, \dots, l_n$  os polinómios de Lagrange construídos nesses pontos. Mostre que

$$\sum_{j=0}^n x_j^m l_j(x) = x^m, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

5.4. Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) - 1,$$

onde  $l_0, l_1, \dots, l_n$  são os polinómios de Lagrange de grau  $n$  associados aos nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Prove que:

- a)  $g$  é um polinómio de grau  $\leq n$ .
- b)  $g(x_i) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

c)  $g(x) = 0$ , para todo o  $x$ .

**5.5.** Seja  $f$  um polinómio de grau  $m$  e sejam  $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 2$  pontos distintos em  $[a, b]$ . Deduza que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \begin{cases} p_{m-n-1}^*(x), & n < m - 1 \\ a_m, & n = m - 1 \\ 0, & n > m - 1 \end{cases}$$

onde  $p_{m-n-1}^*$  designa um polinómio de grau  $m - n - 1$  e  $a_m$  é o coeficiente do termo em  $x^m$  de  $f$ .

**5.6.** Na tabela seguinte são apresentados valores de uma função  $f \in C^2(]0, +\infty[)$ :

$x$	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

a) Obtenha o polinómio  $p_2$  que interpola  $f$  nos três pontos tabelados, usando a fórmula de Lagrange.

b) O mesmo que na alínea b), mas usando a fórmula de Newton.

c) Calcule  $p_2(1.3)$  e obtenha um majorante do erro  $f(1.3) - p_2(1.3)$ , sabendo que  $f(x) - 1/x$  é um polinómio de grau não superior a 2.

**5.7.** Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f$ :

$x_i$	-1	1	4
$f(x_i)$	2	-2	-8

Supondo que  $f$  é um polinómio e que

$$f[-1, 1, 2] = 4, \quad f[-1, 1, 2, 4, x] = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 4\},$$

determine a forma de  $f(x)$ .

**5.8.** Considere a seguinte tabela de valores da função  $f(x) = \log_{10} x$ :

$x_i$	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de  $f(2.4)$ .

b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar  $f(x)$ , pelo método utilizado na alínea anterior, quando  $x \in [2, 3]$ . Compare com o erro do resultado obtido para  $x = 2.4$ .

**5.9.** Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f$ :

$x_i$	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
$f_i$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

a) Obtenha  $f(0.47)$  usando um polinómio de grau 2.

b) Admitindo que  $f \in C^3([0, 1])$  e que  $\max_{x \in [0, 1]} |f^{(3)}(x)| = M$ , calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior.

**5.10.** Seja  $f$  uma função que nos nós  $\{-1, 1, 3\}$  tem como polinómio interpolador

$$p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2.$$

a) Sabendo que  $f[-1, 1, 2] = 4$ , calcule o polinómio  $p_3$  que interpola  $f$  nos nós anteriores e também em  $x_3 = 2$ .

b) Sabendo ainda que  $f^{(iv)}(x) = 78$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , determine a expressão analítica de  $f$ .

**5.11.** Seja  $f \in C^3[0, 1]$  uma função real.

a) Mostre que existe um e um só polinómio  $p$  de grau  $\leq 2$  tal que

$$p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

b) Supondo que  $|f'''(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$ , mostre que

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{6}.$$

**5.12.** Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f$ :

$x_i$	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	1	2

a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de  $f$  de grau menor ou igual a 3.

b) Sabendo que  $f'''(x) = 4x - 1$ , utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de  $f$ .

**5.13.** Considere a seguinte tabela de valores de uma função  $f$ ,

$x_i$	-2	0	2	4
$f(x_i)$	-17	5	-5	c

que se sabe ser um polinómio da forma

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 5,$$

com  $a_1, a_2$  reais. Que relação existe entre o polinómio interpolador de  $f$  nos 3 primeiros pontos e a função  $f$ ? Determine o valor de  $f(4)$ .

**5.14.** Considere  $a \neq 0$  e uma função  $g$  para a qual,

$$g(0) = a, \quad g(g(0)) = 2a, \quad g(g(g(0))) = b.$$

a) Determine o polinómio interpolador de  $g$  no conjunto de nós  $\{0, a, 2a\}$ .

b) Considere  $b$  de forma a que  $g$  tenha um ponto fixo em  $2a$ . Mostre que numa vizinhança desse ponto fixo o polinómio interpolador  $p_2$  é contractivo. Determine o outro ponto fixo de  $p_2$  e verifique que num intervalo que inclua esse ponto o polinómio não é contractivo.

**5.15.** Sabendo que  $f^{(n+1)}([a, b]) \subset [a, b]$ , mostre que o erro de interpolação verifica, para qualquer  $x \in [a, b]$ ,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max\{|a|, |b|\}e^{|b-a|}.$$

**5.16.** Suponha que os valores de  $f$  calculados nos nós  $x_0, \dots, x_n$  estão afectados de erro, tendo apenas sido obtidas aproximações  $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_n$ .

Considere  $p_n$  o polinómio interpolador obtido com os valores exactos e  $\tilde{p}_n$  o polinómio interpolador obtido com os valores aproximados.

a) Mostre que se  $|f_k - \tilde{f}_k| \leq \varepsilon$ , então

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq C\varepsilon,$$

onde  $C = (n + 1) \max_k \max_{x \in [x_0, x_n]} |l_k(x)|$ .

b) No caso de nós igualmente espaçados, e  $n = 2$ , obtenha  $C = \frac{5}{4}$ .

**5.17.** Considere a seguinte tabela de valores:

$x_i$	-3	-1	1	3
$f_i$	-33	14	-2	-5

a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em  $[-1, 3]$ , determine por interpolação inversa o zero da função situado no intervalo  $[-1, 1]$ , utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

b) Obtenha o polinómio interpolador de  $f$  nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo  $[-1, 1]$ , obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

c) Supondo que, para  $x \geq -1$ , a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que  $f[-1, 1, 2] = 4$ , escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter  $f(x)$ .

**5.18.** Considere uma função injectiva que toma os valores

$$f(-2) = -1, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 3.$$

Determine o polinómio interpolador para a função inversa nos pontos indicados. Encontre um valor aproximado para a raiz de  $f$  usando interpolação inversa.

**5.19.** Seja  $f \in C^1([a, b])$  e suponha que  $f(a)f(b) < 0$  e  $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ ; logo existe um único  $z \in (a, b)$  tal que  $f(z) = 0$ .

a) Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  pontos distintos em  $[a, b]$  e sejam  $y_0, y_1, \dots, y_n$  os valores de  $f$  nesses pontos, isto é,  $y_j = f(x_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Escreva uma expressão para o polinómio  $q_n \in \mathcal{P}_n$  que interpola  $f^{-1}$  nos nós  $y_0, y_1, \dots, y_n$ .

b) Notando que  $z = f^{-1}(0)$ , utilize o polinómio  $q_3$  e os seguintes valores tabelados para aproximar a raiz da equação

$$f(x) = e^{-x} - x = 0.$$

$x_i$	0.3	0.4	0.5	0.6
$e^{-x_i}$	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

**5.20.** Seja  $p_n(x)$  o polinómio interpolador de  $f$  em  $n + 1$  nós  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , igualmente espaçados no intervalo  $[a, b]$  e tais que  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ .

a) Mostre que se existir uma constante  $M > 0$  tal que  $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M^n$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$ . Verifique que este resultado se aplica à função  $f(x) = e^{3x}$ .

b) Mostre que se existir uma constante  $M \in (0, e/(b - a))$  tal que  $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M^n(n + 1)!$ , então também  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$ .

**5.21.** Seja  $f$  uma função indefinidamente diferenciável para  $x \geq 0$  e tal que  $|f^{(m)}(x)| \leq M$ , para todo o  $x \geq 0$  e para todo o  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Seja  $p_n$  o polinómio interpolador de  $f$  nos pontos  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ . Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$  para cada  $x \geq 0$ .

**5.22.** Esboçe o gráfico do polinómio mónico

$$\psi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^n (t - i)$$

no intervalo  $[0, n]$  para diferentes valores de  $n$ . Verifique que

$$\max_{t \in [0, n]} |\psi_{n+1}(t)| < n!$$

**5.23.** Considere as funções

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad g(x) = e^x + e^{-x}, \quad x \in [-1, 1].$$

**a)** Determine o polinómio interpolador de Lagrange de  $f$  e de  $g$  nos pontos

$$x_i = -1 + \frac{2(i-1)}{n}, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

com  $n = 5, 9$ , e  $13$ . Compare graficamente os polinómios interpoladores com as funções a aproximar. Explique os resultados com base na teoria.

**b)** Construa o polinómio interpolador  $p_n$  de  $f$  usando os zeros do polinómio de Chebyshev

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

com  $n = 5, 9$ , e  $13$ .

**5.24.** Pretende-se interpolar uma função  $f$  no intervalo  $[-2, 3]$  por um polinómio de grau 5.

**a)** Quais os nós que deve considerar para que o erro do polinómio interpolador seja o menor possível nesse intervalo?

**b)** Determine a função interpoladora correspondente a esses nós, quando

$$f(x) = e^{-(x-1)^2}.$$

**c)** O mesmo que em b), considerando nós igualmente espaçados.

**d)** Compare graficamente os erros obtidos em b) e c).

**5.25.** Pretende-se construir uma tabela de valores da função  $e^x$ , para  $x \in [0, 1]$ , com pontos igualmente espaçados  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ , onde  $h$  é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau  $\leq 1$  nos pontos  $x_j, x_{j+1}$ . Determine o valor máximo do espaçamento  $h$  para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo  $[0, 1]$  seja inferior a  $10^{-6}$ .