INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial
Ano Lectivo: 2003/2004

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

6.1. Considere a função

$$f(x) = |x|, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Por aplicação do Teorema de Chebyshev prove que a melhor aproximação uniforme de f em $\mathcal{P}_3[-1,1]$ é dada por

$$p_3^*(x) = x^2 + \frac{1}{8}, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

6.2. Determine, usando o Teorema de Chebyshev e observações geométricas, a melhor aproximação uniforme da função

$$f(x) = e^x, \qquad x \in [0,1],$$

a) no espaço $\mathcal{P}_0[0,1]$;

b) no espaço $\mathcal{P}_1[0,1]$.

6.3. Considere a função

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{100}, \qquad x \in [-1,1].$$

Determine o polinómio $p_2 \in \mathcal{P}_2[-1,1]$ tal que

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \quad \text{é mínimo.}$$

Indique o valor do mínimo.

6.4. Considere a seguinte tabela:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

a) Obtenha o polinómio do 1º grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.

b) Idem, mas para o polinómio do 2º grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

c) Admitindo que $|f'(x) - g'(x)| \leq M$, $\forall x \in [1.2, 1.5]$, obtenha um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior.
Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.

d) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3º grau?

6.5. Seja f uma função tal que

$$f(-2) = 3, \quad f(0) = 6, \quad f(2) = 15.$$

Obtenha a função do tipo

$$g(x) = ax + b,$$

que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6,$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais.

6.6. Considere os 6 pontos

$$(-1, 7), \quad (0, 6), \quad (1, 6), \quad (2, 4), \quad (4, 3), \quad (5, 1).$$

a) Determine a função

$$g(x) = a - x + bx^2,$$

cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos segundo o método dos mínimos quadrados.

b) O mesmo que em a) usando

$$g(x) = ae^{bx} - \frac{x^2}{4},$$

e uma transformação de variáveis.

6.7. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}.$$

Determine as constantes A, B pelo método dos mínimos quadrados.
Sugestão: Poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variáveis.

6.8. Determine a função da forma

$$g(x) = Be^x + Ce^{-x},$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores:

x_i	0	0.5	1.0
f_i	5.0	5.2	6.5

6.9. Considere os pontos

$$(-5,-1), \quad (-3,0), \quad (-1,-1), \quad (1,2).$$

a) Determine a função da forma

$$g(x) = \frac{a}{x+1} + bx^2,$$

que melhor aproxima esses pontos no sentido dos mínimos quadrados.

b) Determine uma função da mesma forma que melhor aproxima o polinómio interpolador que passa pelos pontos referidos.

c) O mesmo que em a) para

$$g(x) = \frac{a+bx^2}{x+1}.$$

6.10. Considere a aproximação por mínimos quadrados para os pontos

$$(-1,1), \quad (0,1), \quad (1,2), \quad (2,2),$$

por uma função

$$g = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3,$$

com

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = \sin(\pi x) + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 1.$$

Mostre que a matriz do sistema normal não é invertível e comente a escolha das funções ϕ_k.

6.11. Considere Q uma matriz simétrica definida positiva e o produto interno definido em $\mathbb{R}^N$ por

$$\langle v, w\rangle_Q = v^\top Q w.$$

Supondo que queremos aproximar uma lista de pontos cujas ordenadas estão no vector $y \in \mathbb{R}^N$ por uma função

$$g = a_1\phi_1 + \cdots + a_m\phi_m,$$

onde $\phi_1, \ldots, \phi_m$ são funções linearmente independentes (para a lista de abcissas), mostre que o sistema a resolver pode escrever-se na forma

$$X^\top QX\, a = X^\top Q\, y,$$

onde X é uma matriz $N \times m$ e $a = [a_1\, a_2\, \ldots\, a_m]^\top$.

6.12. a) Determine qual a função

$$g(x) = a + cx^2,$$

que melhor aproxima $f(x) = \sin(\pi x)$ no intervalo $[0, 1]$ segundo o método dos mínimos quadrados.

b) Qual o erro no ponto $x = 1$, e qual o maior erro $|f(x) - g(x)|$ nesse intervalo.

6.13. Determine, usando os três primeiros polinómios ortogonais de Legendre, a melhor aproximação mínimos quadrados da função $f(x) = x^4$ no espaço $\mathcal{P}_2[-1, 1]$.

6.14. Demonstre a seguinte propriedade dos polinómios de Chebyshev $T_n(x), n = 0, 1, \ldots$:

$$< T_n, T_m >= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0 \end{cases}.$$

6.15. Considere a função

$$f(x) = \arccos x, \qquad x \in [-1, 1].$$

Determine o polinómio $q_2^* \in \mathcal{P}_2[-1, 1]$ que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \frac{[f(x) - q(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad q \in \mathcal{P}_2[-1, 1].$$

6.16. Pretende-se obter a função

$$g(x) = a + b(2x^2 - 1) + c(4x^3 - 3x),$$

que melhor aproxima $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, no intervalo $]-1, 1[$, de forma a minimizar a distância dada por

$$d(f, g) = \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{[f(x) - g(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \right\}^{1/2}.$$

a) Determine os valores a, b, c que melhor efectuam essa aproximação.

b) Indique qual o valor mínimo para $d(f, g)$.

6.17. Considere o espaço linear $C^1([a,b])$ e o operador definido por

$$L(f) = \left\{ \int_a^b [f'(x)]^2 \, dx \right\}^{1/2}, \qquad f \in C^1([a,b]).$$

a) Sabendo que

$$L(f+g) \leq L(f) + L(g), \qquad \forall f, g \in C^1([a,b]),$$

prove que L define um seminorma (que não é norma) em $C^1([a,b])$.

b) Recorrendo à teoria da melhor aproximação e usando L, mostre que existem constantes reais $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ tais que

$$\int_a^b (\cos x + \bar{\alpha} x + \bar{\beta})^2 \, dx \leq \int_a^b (\cos x + \alpha x + \beta)^2 \, dx, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

6.18. a) Prove que

$$p_{n-1}^*(x) = x^n - 2^{1-n} T_n(x),$$

é a melhor aproximação uniforme da função

$$f(x) = x^n, \qquad x \in [-1,1],$$

em $\mathcal{P}_{n-1}[-1,1]$.

b) Calcule $\|f - p_{n-1}^*\|_\infty$.

6.19. Seja $T_n(x)$, $x \in [-1,1]$, o polinómio de Chebyshev de grau n. Prove que no conjunto $\bar{\pi}_n$ dos polinómios mónicos de grau n, definidos em $[-1,1]$, o polinómio

$$\bar{T}_n = 2^{1-n} T_n,$$

é a melhor aproximação uniforme da função nula.

6.20. Usando o Exercício anterior, prove que a melhor aproximação uniforme da função nula, relativamente ao intervalo $[a,b]$, no conjunto $\bar{\pi}_n$ dos polinómios mónicos de grau n, é o polinómio p_n^* definido por

$$p_n^*(x) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right).$$

6.21. Determine a melhor aproximação da função nula relativamente a $[-1,3]$, da forma

$$\frac{x^3}{3} + bx^2 + cx + d.$$