**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**
**Licenciatura em Engenharia Biológica**
**Licenciatura em Engenharia Química**
**Ano Lectivo: 2005/2006**

## ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

## Exame de 10 de Janeiro de 2006

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

**[1]**$^{20}$ Determine o erro relativo que se comete ao calcular o valor de $z = g(g(x))$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínuamente diferenciável, expresso em termos do erro relativo do valor de $x$ e dos erros relativos de arredondamento no cálculo dos valores da função $g$.

**[2]** Considere a equação

$$x^2 - 1 - \cos x = 0.$$

**(a)**$^{10}$ Mostre que a equação tem dois e só dois zeros reais, $z_1$ e $z_2$, tais que

$$z_1 = -z_2, \qquad z_2 \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right].$$

**(b)**$^{15}$ Mostre que a sucessão $\{x_m\}$ gerada pelo método iterativo $x_{m+1} = g(x_m),\ m \geq 0$, com função iteradora $g(x) = \sqrt{1 + \cos x}$, converge para $z_2$, $\forall x_0 \in [1.0, 1.3]$. Note que $g''(x) = -\dfrac{g(x)}{4}$.

**(c)**$^{20}$ Usando o método da alínea anterior com $x_0 = 1.0$ calcule um valor aproximado para $z_2$ com um erro absoluto inferior a 0.05.

**[3]**$^{20}$ Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Determine para que valores de $a$ o número de condição da matriz $A$ relativo à norma $\|\cdot\|_\infty$ satisfaz a $1 \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \leq \dfrac{3}{2}$.

**[4]** Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 3 |
| $f(x_i)$ | 2 | -1 | -4 | c |

onde $c$ é uma constante real.

**(a)**[15] Determine o polinómio interpolador de $f$, $p_3$, nos pontos da tabela pela fórmula de Newton às diferenças divididas, expresso em termos de $c$.

**(b)**[10] Sabendo que $f \in C^3(\mathbb{R})$, com $f'''(x) = 5, \forall x \in \mathbb{R}$, determine $c$.

**(c)**[20] Tomando $c = -8$, determine os valores das constantes $a$ e $b$ que minimizam o erro quadrático médio

$$E(a, b) = \sum_{i=0}^{3} \left[f(x_i) - a - bx_i\right]^2 .$$

**[5]** Considere a fórmula de quadratura

$$Q(f) = A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1),$$

para aproximar o integrar

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx,$$

onde $f$ é uma função contínua.

**(a)**[20] Determine o nó $x_1$ e os pesos $A_0, A_1, A_2$ de modo a que a fórmula seja exacta para polinómios de grau menor ou igual a 3.

**(b)**[10] Determine o grau de precisão da fórmula obtida na alínea anterior.

**[6]**[20] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = [y(x)]^2 + x, & x \geq x_0, \\ y(x_0) = y_0, & y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

onde $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, $|y_0| + |z_0| \neq 0$. Obtenha valores aproximados $y_1$ e $z_1$ para $y(h)$ e $y'(h)$, respectivamente, usando um passo de comprimento $h > 0$ do método de Heun.

**[7]**[20] Considere o problema de valor inical

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \geq 0, \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função indefinidamente diferenciável e $\alpha \in \mathbb{R}$. Demonstre que o método de Heun para obter uma solução aproximada para este problema tem consistência e convergência de ordem dois.

$\boxed{\text{10.JAN.2006}}$