INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Biológica
Licenciatura em Engenharia Química
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Exercícios

4.1. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{0.5}{1+(x_1+x_2)^2} \\ x_2 = \dfrac{0.5}{1+(x_1-x_2)^2} \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema tem uma única solução z em $\mathbb{R}^2$.

b) Obtenha um valor aproximado $x^{(4)}$ para a solução usando quatro iteradas do método do ponto fixo. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(4)}\|_\infty$.

4.2. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2}{4}\cos(x_1) = 0 \\ 1 - x_2 + |x_1 - 1| = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema tem uma e uma só solução $z \in [0,1] \times [1,2]$.

b) Determine uma aproximação da solução pelo método do ponto fixo cujo erro absoluto seja inferior a 0.05.

4.3. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1 = f(x_1 + x_2) \\ x_2 = g(x_1 + x_2) \end{cases}$$

em que as funções f e g verificam $|f'(t)| < \alpha$, $|g'(t)| < \beta$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e em que $f(\mathbb{R}) \subseteq [a,b]$, $g(\mathbb{R}) \subseteq [a,b]$.

a) Mostre que existe uma única solução do sistema em $\mathbb{R}^2$ se $\alpha + \beta < 1$, que essa solução se encontra em $[a,b] \times [a,b]$, e que o método do ponto fixo converge, quaisquer que sejam os valores iniciais em $\mathbb{R}$.

b) Reduza o sistema anterior à resolução de duas equações em $\mathbb{R}$, e mostre o mesmo resultado que em a).

c) Concretize os resultados anteriores para o sistema

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\cos(x_1 + x_2) - \cos^2\left(\frac{1}{5}(x_1 + x_2)\right) \\ x_2 = \sin\left(\frac{1}{3}(x_1 + x_2)\right) + \frac{1}{4}\sin^2(x_1 + x_2) \end{cases}$$

d) Começando com $(0,0)$, determine uma iterada pelo método de Newton em $\mathbb{R}^2$ para a aproximação da solução do sistema anterior.

4.4. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \varepsilon \cos(x_3) = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3\varepsilon x_1 x_3 = 0 \\ \varepsilon x_1^2 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1|, |x_2|, |x_3| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

b) Usando a função iteradora

$$G(x) = \left(-\frac{1}{2}(x_2 + \varepsilon \cos(x_3)),\ -\frac{1}{3}(x_1 + 3\varepsilon x_1 x_3),\ -\frac{1}{3}\left(x_2 + \varepsilon x_1^2\right) \right),$$

mostre que, aplicando o método do ponto fixo, se tem

$$\left| z - x^{(m)} \right| \leq \frac{5^m}{6^{m-1}} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty$$

qualquer que seja o vector inicial $x^{(0)} \in D$.

c) No caso $\varepsilon = 0$, mostre que o método de Jacobi converge e que temos

$$\left\| x^{(m)} \right\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2} \right)^m \left\| x^{(0)} \right\|_\infty$$

para qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

4.5. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 - 3x_2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

b) Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução do sistema usando duas iteradas do método do ponto fixo partindo da condição inicial $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

c) Obtenha um valor aproximado $\tilde{x}^{(2)}$ para a solução do sistema usando duas iteradas do método da Newton generalizado partindo da aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)} = [1\ 1\ 0]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - \tilde{x}^{(2)}\|_\infty$.
Nota. Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver os sistemas lineares que ocorrem na aplicação do método de Newton generalizado.

4.6. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 - \cos(x_1 + x_2) = 2 \\ 3x_2 - \sin(x_1 + x_2) = 6 \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \times \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right],$$

e que esta é também a única raiz do sistema em $\mathbb{R}^2$.

b) Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução única z do sistema usando duas iteradas do método do ponto fixo partindo da condição inicial $x^{(0)} = [1\ 2]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_1$.

c) Obtenha um valor aproximado $\tilde{x}^{(2)}$ para a solução única z do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado partindo da condição inicial $\tilde{x}^{(0)} = [1\ 2]^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - \tilde{x}^{(2)}\|_1$.
Nota. Utilize o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema linear que ocorre na aplicação do método de Newton generalizado.

4.7. Considere um sistema de equações escrito na forma $F(x) = 0$, e seja $J_F(x)$ a matriz jacobiana de F calculada em x.

a) Mostre que se existir um $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $\|I + \omega J_F(x)\| \leq L < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, então o sistema possui uma única solução em $\mathbb{R}^n$.

b) Conclua que o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + \sin(x_3) = 1 \\ x_1 + 4x_2 + \cos(x_3) = 1 \\ \sin(x_1) + \cos(x_2) + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução em $\mathbb{R}^3$, que está no conjunto $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right] \times \left[-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right]$.

c) Determine uma aproximação dessa solução calculando duas iterações pelo método de Newton, começando com a iterada inicial $x^{(0)} = 0$.

4.8. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) = 10 \\ 3(x_2 + 1) + x_3^2 = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 = 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial $x^{(0)} = [3\ 2\ 1]^T$.

a) Mostre que o sistema linear $Ax = b$ a ser resolvido para se obter $x^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenha ainda o vector b.

b) Resolva o sistema linear obtido em a), pelo método de eliminação de Gauss com pesquisa parcial de pivot, e obtenha $x^{(1)}$.

4.9. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^{x_1} - 3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1^2 + 2x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

a) Tomando como aproximação inicial $x^{(0)} = [0\ 1\ 2]^T$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

4.10. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x_1^3 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ e^{x_2} - x_3^2 = 1 \\ -x_1^2 + x_2 + x_3 = \mu \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = [c\ 0\ 0]^T$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $x^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

b) Mostre que a matriz A pode ser escrita na forma $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior com diagonal principal unitária e U é uma matriz triangular superior. Utilize este resultado para concluir para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única.

c) No caso de $c = 1$, utilize o resultado $A = LU$ para resolver o sistema linear e calcule $x^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).

d) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

4.11. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2^3 = 9 \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 = 4 \end{cases}$$

Investigue a existência de soluções para o sistema utilizando o método de Newton generalizado com diferentes aproximações iniciais.