

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica  
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

**1.1.** Suponha que pretende calcular a soma de três números reais  $a, b, c$ ,  $S = a + b + c$ , usando os dois seguintes algoritmos:

$$(1) S_1 = (a + b) + c; \quad (2) S_2 = a + (b + c).$$

(a) Para

$$a = 0.33678429 \times 10^2, \quad b = -0.33677811 \times 10^2, \quad c = 0.23371258 \times 10^{-4},$$

calcule o valor exacto de  $S$ .

(b) Para os valores de  $a, b, c$  da alínea (a), e supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10,8,-10,10), com arredondamento simétrico, calcule valores aproximados de  $S$  usando os dois algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine a expressão do erro relativo do algoritmo (1) em termos dos erros relativos das parcelas e dos erros de arredondamento das duas operações. Utilize este resultado para concluir qual a ordem por que deve proceder à soma por forma a minimizar os efeitos dos erros de arredondamento.

**1.2.** Considere o polinómio definido por

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

e os dois seguintes algoritmos para o cálculo de  $f(x)$ :

$$(1) f_1(x) = x \times (x \times x) + a \times (x \times x) + b \times x + c.$$

$$(2) f_2(x) = ((x + a) \times x + b) \times x + c$$

O algoritmo (2) é designado por algoritmo de Horner.

(a) Para  $a = -6.1$ ,  $b = 3.2$ ,  $c = 1.5$ , calcule o valor exacto de  $f(4.71)$ .

(b) Para  $a = -6.1$ ,  $b = 3.2$ ,  $c = 1.5$ , e supondo que efectua os cálculos no sistema FP(10,3,-10,10), com arredondamento simétrico, calcule valores aproximados de  $f(4.71)$  usando os dois algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine a expressão do erro relativo do algoritmo de Horner em termos dos erros relativos de  $a, b, c, x$  e dos erros de arredondamento das operações efectuadas.

**1.3.** Considere a equação quadrática

$$x^2 + 2bx + c = 0,$$

com coeficientes  $b$  e  $c$  reais positivos. Considere os dois seguintes algoritmos para o cálculo das raízes  $x_1$  e  $x_2$  da equação:

$$(1) \quad x_1 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \quad x_2 = -b + \sqrt{b^2 - c};$$

$$(2) \quad x_1 = -b - \sqrt{b^2 - c}, \quad x_2 = \frac{c}{x_1}.$$

(a) Para  $b = 34.56$ ,  $c = 1$ , verifique que as raízes têm os valores  $x_1 = -69.105529\dots$  e  $x_2 = -0.014470622\dots$

(b) Para  $b = 34.56$ ,  $c = 1$ , e supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10,4,-10,10), com arredondamento simétrico, obtenha valores aproximados para as raízes usando os algoritmos indicados.

(c) Determine os erros relativos dos valores obtidos na alínea (b).

(d) Determine as expressões dos erros relativos dos dois algoritmos indicados em termos dos erros relativos dos coeficientes  $b, c$  e dos erros de arredondamento das operações efectuadas. Suponha que a raiz quadrada é uma operação elementar.

**1.4.** Considere o sistema linear

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b,$$

onde  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  não singular de elementos reais e  $b$  é um vector de  $\mathbb{R}^2$ , ambos supostos conhecidos.

(a) Para

$$A = \begin{bmatrix} 0.003000 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{bmatrix},$$

verifique que a solução exacta do sistema é  $x = 10.00$ ,  $y = 1.000$ .

(b) Supondo que efectua os cálculos num sistema FP(10,4,-10,10), com arredondamento simétrico, determine as soluções aproximadas do sistema pelo método de eliminação de Gauss, sem e com pesquisa parcial de pivot.

(c) Determine os erros relativos das soluções aproximadas obtidas na alínea (b).

(d) Para  $A$  e  $b$  com componentes arbitrárias, sem erros inerentes e com representação exacta no sistema de ponto flutuante utilizado, determine a expressão dos erros relativos dos valores aproximados  $\tilde{x}, \tilde{y}$  de  $x, y$ , obtidos pelo método de eliminação de Gauss, em termos dos erros de arredondamento das operações utilizadas .