**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**
**Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica**
**Ano Lectivo: 2005/2006**

# ANÁLISE NUMÉRICA

## Exercícios

**2.1.** Considere a equação

$$e^x - \sin x = 0.$$

**(a)** Mostre que a equação tem uma e uma só raiz $z$ no intervalo $[-3.5, -2.5]$.

**(b)** Utilize o método da bissecção para determinar um valor aproximado da raiz $z$ com um erro absoluto inferior a 0.05.

**(c)** Determine o número de iteracções do método da bissecção suficientes para garantir que o erro absoluto do valor aproximado da raiz $z$ seja inferior a $10^{-6}$.

**2.2.** Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0.$$

**(a)** Mostre que a equação tem apenas três raízes reais, $z_1 < z_2 < z_3$, tais que

$$z_1 \in [-1, 0], \qquad z_2 \in [0, 1], \qquad z_3 \in [4, 5].$$

**(b)** Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2},$$

converge para $z_2$, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [0, 1]$.

**(c)** Determine um valor aproximado da raiz $z_2$ pelo método da alínea (b) com um erro absoluto inferior a 0.01.

**(d)** Mostre que não é possível usar o método da alínea (b) para obter um valor aproximado da raiz $z_3$, embora $z_3$ seja um ponto fixo de $g$.

**2.3.** Considere a equação
$$e^x - 4x^2 = 0.$$
para a qual foi verificado na alínea (a) do Exercício 2.2 que tem apenas três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$.

**(a)** Mostre que o método do ponto fixo com função iteradora $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,
$$g(x) = \log(4x^2),$$
converge para $z_3$, qualquer que seja a iterada inicial $x_0 \in [4, 5]$.

**(b)** Determine um valor aproximado da raiz $z_3$ pelo método da alínea (a) com um erro absoluto inferior a 0.01.

**(c)** Mostre que não é possível usar o método da alínea (a) para obter valores aproximados das raízes $z_1$ e $z_2$.

**2.4.** Considere a equação
$$f(x) = 1 - 2x + 2e^{-x} = 0,$$
e o seguinte método iterativo:
$$x_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_{m+1} = x_m + \frac{f(x_m)}{2+\alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots$$
com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

**(a)** Mostre que a equação tem uma única raiz real $z$ tal que $z \in [0, 1]$.

**(b)** Mostre que para todo o $\alpha \in [0, 1]$ o método iterativo converge para a raiz $z$, qualquer que seja $x_0 \geq 0$.
Sugestão: Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo $[0, \max\{2, x_0\}]$.

**(c)** Determine valores aproximados da raiz $z$ com um erro inferior a $10^{-5}$ usando o método iterativo com $\alpha = 0.4$ e $\alpha = 0.8$. Considere em ambos os casos $x_0 = 2$.

**(d)** Determine o valor de $\alpha$ para o qual a convergência do método iterativo para a raiz $z$ é a mais rápida possível.