INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

3.9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ 3 & 4 & 1 \\ \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α para os quais a matriz A é definida positiva.

Nota. Uma matriz simétrica $A \in L^n(\mathbb{R})$ diz-se *definida positiva* se e só se $x^T Ax > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Uma matriz é definida positiva se e só se são positivos os determinantes de todos os menores principais de A; chama-se *menor principal* de A à submatriz de dimensão k de A cujos elementos são os elementos das primeiras k linhas e k colunas de A, com $k = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Determine os valores de α para os quais a matriz $2D - A$, onde D é uma matriz diagonal com a mesma diagonal principal que A, é definida positiva.

(c) Determine os valores de α para os quais o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b, \ \forall b \in \mathbb{R}^3, \ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

(d) Determine os valores de α para os quais o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b, \ \forall b \in \mathbb{R}^3, \ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

3.10. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

para o qual foi verificado no Exercício 3.9 que o método de Gauss-Seidel converge para a sua solução para qualquer condição inicial enquanto que o método de Jacobi não converge para todas as condições iniciais. Mostre que o método de Jacobi converge para a solução do sistema $Ax = b$ se e só se as condições iniciais pertencerem ao plano

$$\left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} = \frac{1}{8} \right\}.$$

v.s.f.f.

3.11. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$0 < \alpha < 1$, e b é um vector arbitrário. Estude a convergência do método de Gauss-Seidel modificado com parâmetro $\omega > 0$ para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer condição inicial para todos os valores de α e ω.

3.12. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix},$$

e b é um vector arbitrário. Determine os valores do parâmetro $\omega \in \mathbb{R}^+$ para os quais o método de Jacobi modificado converge para a solução do sistema $Ax = b$ para qualquer condição inicial e o valor ω_{opt} para o qual o método converge mais rapidamente.