

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exercícios

4.1. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 5x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 4x_2 - \sin x_1 - \cos x_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o sistema tem apenas duas soluções em \mathbb{R}^2 .

(b) Calcule valores aproximados das duas soluções usando em cada caso quatro iteradas do método do ponto fixo com a função iteradora apropriada.

(c) Obtenha uma estimativa do erro das duas aproximações obtidas na alínea (b) usando a norma do máximo.

4.2. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \varepsilon \cos x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3\varepsilon x_1 x_3 = 0 \\ \varepsilon x_1^2 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

onde ε é um parâmetro real.

a) Mostre que para $-\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2}$ o sistema tem uma solução única z no conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

b) Para $\varepsilon = \frac{1}{4}$, obtenha um valor aproximado da solução z pelo método do ponto fixo com condição inicial $x^{(0)} = 0$ com um erro inferior a 0.1 (usando a norma do máximo).

c) Para $\varepsilon = \frac{1}{4}$, determine quantas iteradas do método do ponto fixo com condição inicial $x^{(0)} = 0$ seriam necessárias para garantir um erro da solução inferior a 10^{-6} (usando a norma do máximo).

4.3. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) - 10 = 0 \\ 3x_2 + x_3^2 - 8 = 0 \\ 3x_1 + x_3^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

a) Determine o valor aproximado de uma das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [\alpha \ \beta \ 1]^T$, onde α, β são números reais arbitrários.

b) Determine o valor aproximado de outra das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [-4 \ -4 \ -4]^T$.

c) Verifique analiticamente que o sistema tem três e só três soluções em \mathbb{R}^3 .

4.4. Considere o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2^3 = 9 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 = 4 \end{cases}$$

a) Determine o valor aproximado de uma das soluções do sistema usando duas iteradas do método de Newton generalizado com aproximação inicial $x^{(0)} = [1.35 \ 1.75]^T$.

b) Obtenha uma estimativa do erro da solução aproximada obtida na alínea anterior (usando a norma do máximo).

c) Investigue a existência de outras soluções do sistema usando o método de Newton generalizado com diferentes aproximações iniciais.