INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame de 27 de Junho de 2006

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1]^{20} Considere o seguinte algoritmo para o cálculo do valor de um polinómio do 2º grau p num ponto $x \in \mathbb{R}$:

$$p(x) = (a_2 \times x + a_1) \times x + a_0.$$

Supondo que x, a_0, a_1, a_2 são números reais com representação exacta no sistema de ponto flutuante utilizado no cálculo, e que a unidade de arredondamento deste sistema é U, mostre que o valor calculado de $p(x)$, $\tilde{p}(x)$, se pode escrever na forma

$$\tilde{p}(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0,$$

onde A_0, A_1, A_2 são valores aproximados de a_0, a_1, a_2, respectivamente, cujos erros relativos satisfazem a $|\delta_{A_i}| \leq K_i U$, onde $K_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, para $i = 0, 1, 2$.

[2] Considere a equação

$$x^4 - 8x - 4 = 0.$$

(a)^{10} Mostre que a equação tem duas e só duas raízes reais, z_1 e z_2, tais que

$$z_1 \in [-0.6, -0.4], \qquad z_2 \in [2.0, 2.2].$$

(b)^{20} Determine um valor aproximado da raiz z_2 pelo método de Newton com um erro absoluto inferior a 0.01.

(c)^{20} Determine uma função iteradora g e um intervalo I tais que a sucessão $\{x_m\}$ gerada pelo método iterativo $x_{m+1} = g(x_m)$, $m \geq 0$, converge para z_2, $\forall x_0 \in I$. Justifique.

[3]^{20} Considere o método iterativo,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega\left(b - Ax^{(k)}\right), \quad k \geq 0, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

para obter uma aproximação da solução do sistema linear $Ax = b$, onde $b \in \mathbb{R}^2$ é um vector arbitrário e $A \in L^2(\mathbb{R})$ é uma matriz cujos valores próprios λ_1, λ_2 são reais e tais que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Determine: **(i)** o intervalo de valores do parâmetro ω para os quais está garantida a convergência do método iterativo para a solução do sistema linear; **(ii)** o valor de ω para o qual o método converge mais rapidamente.

[4][20] Determine a função spline cúbica interpoladora polinomial natural, s, cujos nós são os pontos $-1, 0, 1$ e que toma os valores $s(-1) = 4, s(0) = 10, s(1) = 8$.

[5] Tendo em atenção a definição e as propriedades do sistema de polinómios ortogonais de Chebyshev:

(a)[20] Determine de entre os polinómios de grau menor ou igual a dois a melhor aproximação mínimos quadrados da função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4},$$

relativamente ao produto interno

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{g(x)h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad \forall g, h \in C([-1,1]).$$

(b)[20] Determine a fórmula de Gauss-Chebyshev com dois nós de integração que aproxima o integral

$$I(f) = \int_{2}^{5} \frac{f(x)}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}\, dx, \qquad \forall f \in C([2,5]).$$

[6][20] Mostre que

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 f''(\xi), \qquad \forall f \in C^2([a,b]),$$

onde $\xi \in]a, b[$.

[7] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), & x \geq x_0, \\ y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = z_0, & \end{cases}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínuamente diferenciável em D, $(x_0, y_0, z_0) \in D$ e $|y_0| + |z_0| \neq 0$.

(a)[20] Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(x_0 + 2h)$, onde $h > 0$ é o passo de integração, pelo método preditor-corrector de 2ª ordem constituído pelos métodos de Adams-Bashforth de 2ª ordem ($p = 1, q = 2$) e de Adams-Moulton de 2ª ordem ($p = 0, q = 2$), com uma única correcção. Os valores aproximados y_1, z_1 de $y(x_0+h), y'(x_0+h)$, respectivamente, devem ser obtidos pelo método de Euler modificado ou do ponto médio.

(b)[10] Mostre que o erro de discretização global no ponto $x_0 + 2h$, $y(x_0 + 2h) - y_2$, é de ordem h^3.

27.JUN.2006