INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Ano Lectivo: 2005/2006

ANÁLISE NUMÉRICA

Exame de 15 de Julho de 2006

Duração: 3 horas. Apresente todos os cálculos que tiver que efectuar.

[1] Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(x), \tag{S}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = x - g(x), \qquad g(x) = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) - \frac{1}{6}\cos(2x_2) \\ \frac{1}{6}\sin(2x_1) - \cos\left(\frac{x_2}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

(a)^{20} Mostre que o sistema (S) tem uma solução única z no conjunto

$$D = [-2, 2] \times [-2, 2]\,,$$

e que esta é também a única solução de (S) em $\mathbb{R}^2$.

(b)^{20} Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução única z do sistema usando duas iteradas do método do ponto fixo com função iteradora g partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}^T$. Apresente uma estimativa do erro $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

(c)^{20} Obtenha um valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$ para a solução z do sistema usando uma iterada do método de Newton generalizado partindo da aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)} = \begin{bmatrix}0 & -\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}^T$.

[2]^{20} Considere os sistemas lineares $Ax = b$ e $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $A, \tilde{A}$ são matrizes quadradas de dimensão d, A é não singular, $\tilde{A}$ é tal que $\|\tilde{A} - A\|_p\,\|A^{-1}\|_p < 1$ e $b, \tilde{b}$ são vectores de $\mathbb{R}^d$. Mostre que

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_p}{\|x\|_p} \leq \frac{\mathrm{cond}_p(A)}{1 - \frac{\|\tilde{A}-A\|_p}{\|A\|_p}\mathrm{cond}_p(A)} \left(\frac{\|\tilde{A} - A\|_p}{\|A\|_p} + \frac{\|\tilde{b} - b\|_p}{\|b\|_p} \right), \qquad p = 1, 2, \infty.$$

[3] Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C^4(\mathbb{R})$:

i	0	1	2	3
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0
$f(x_i)$	1.0	0.648	0.266	0.0993

(a)[20] Determine o polinómio interpolador de f, p_3, nos pontos da tabela usando a fórmula de interpolação de Lagrange.

(b)[15] Sabendo que $|f^{(4)}(x)| \leq 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, determine um majorante para o erro absoluto $|f(x) - p_3(x)|$ válido para todos os valores de $x \in [0., 3.]$.

(c)[20] Determine os valores das constantes a e b que minimizam o erro quadrático

$$E(a,b) = \sum_{i=0}^{3} \left[f(x_i) - a - bx_i^2\right]^2.$$

(d) Calcule o valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^3 f(x)\,dx,$$

usando:

(i)[10] a fórmula de Newton-Cotes fechada de ordem 3;

(ii)[10] a fórmula dos trapézios composta com três subintervalos.

[4] Considere o sistema de duas equações diferenciais ordinárias não-lineares de 1ª ordem,

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)z(x), \\ z'(x) = [y(x)]^3, \end{cases} \qquad x \geq 0,$$

sujeito às condições iniciais, $y(0) = y_0,\ z(0) = z_0$, onde y_0, z_0 são constantes reais, $y_0 \neq 0$.

(a)[15] Obtenha valores aproximados (y_1, z_1) para $(y(h), z(h))$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Heun (de ordem 2).

(b)[10] Obtenha valores aproximados $(\tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$ para $(y(h), z(h))$, onde $h > 0$ é o passo de integração, usando o método de Taylor de ordem 2.

[5][20] Considere o método multipasso linear da forma

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + h b_{-1} f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Determine os valores dos coeficientes a_0, a_1, a_2, b_{-1} por forma a que o método tenha ordem de consistência três. Diga justificamente se o método assim obtido é ou não convergente.