Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Exame/2ºteste - 16 de Janeiro de 2001 - 9h

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h

2º teste: grupos 5, 6 e 7. Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

(4 val.) **1.** (a) Considere o sólido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x < 2,\ e^x < y < e^{3x},\ 0 < z < 1\right\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados das formas $\int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \cdots dydxdz$ e $\int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} \cdots dxdydz$.

(b) Calcule a massa do sólido

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3,\ 0 < z < x^2 + y^2,\ z < (4 - \sqrt{x^2 + y^2})^2\right\},$$

sabendo que a função densidade de massa é constante igual a 1.

(2 val.) **2.** Considere a região $U \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x^3 + 2y < -1,\ 0 < \frac{x^3}{3} + y < 1\right\}.$$

Calcule o integral duplo

$$\iint_U \frac{x^2(x^3 + 2y)}{(1 + (\frac{x^3}{3} + y)^2)}\, dxdy,$$

usando uma mudança de coordenadas apropriada. Justifique detalhadamente a resposta.

(2 val.) **3.** Determine quais dos seguintes campos vectoriais são gradientes no seu domínio de definição. Justifique detalhamente a resposta.

(a) $\mathbf{f}(x, y) = \left(\dfrac{1}{y^2 + 1}, \dfrac{1}{x^2 + 1}\right)$;

(b) $\mathbf{g}(x, y, z) = \left(\dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2e^{2x+y^2}, \dfrac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2ye^{2x+y^2}, \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right)$.

(2 val.) **4.** Seja $f(x) = \log x$ definida em $I =]0, 1[$. Mostre que f é integrável em I e calcule $\int_I f(x)dx$. *Nota: a primitiva de* $\log x$ *é* $x \log x - x$.

(3 val.) **5.** Considere a variedade

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2xy,\ x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

(a) Calcule a área de M. *Sugestão: comece por escrever uma parametrização para M usando x e y como parâmetros.*

(b) Determine os pontos de M em que o plano tangente a M é horizontal.

(5 val.) **6.** Considere a superfície

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1,\ 0 < z < 1\right\}.$$

(a) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + \cos(yz), y + e^{x^2+z^2}, z + 1)$ através da superfície C, no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

(b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{G}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ através de C, no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

(2 val.) **7.** Seja M uma variedade compacta de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ que não contém a origem. Justifique que existe pelo menos um ponto p de M que minimiza a distância à origem. Mostre que a recta que une p à origem é perpendicular a M em p.