

Análise Matemática III

1º Semestre 2000/2001

2º Exame - Todos os cursos excepto LEFT, LMAC
1 de Fevereiro de 2001

Duração: 3 horas.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o sólido $V \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} - 1, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- (2 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de um integral múltiplo da forma $\int \dots (\int \dots (\int \dots dy) dx) dz$.
- (2 val.) b) Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule $\int_V f$.

(2 val.) 2. Considere a região $S \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < x - y < 1, 1 < xy < 2\}.$$

Calcule o integral

$$\int \int_S (x^2 - y^2) e^{(x-y)^2} dx dy.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

(2 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Calcule o trabalho de f ao longo da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$.

(2.5 val.) 4. Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y + x^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Calcule a massa de M , sabendo que a sua densidade de massa é dada por $\alpha(x, y, z) = x$.

Volte S. F. F.

(2 val.) 5. Calcule o fluxo do campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos(z^2), x^3 + y, 1)$ através do cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < z < 1, x^2 + y^2 = 1\},$$

segundo uma normal escolhida por si.

(2 val.) 6. Usando o teorema de Stokes, calcule o trabalho do campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$, ao longo da circunferência

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 = 1\},$$

segundo um sentido escolhido por si.

(2.5 val.) 7. Determine os pontos da curva $C \subset \mathbb{R}^2$ definida pela equação $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ que se encontram mais próximos da origem.

8. Uma partícula desloca-se ao longo da recta real, sendo a sua posição no instante de tempo t dada por

$$x(t) = \int_1^2 \frac{te^{-tx^2}}{x} dx.$$

(1.5 val.) a) Calcule a velocidade da partícula no instante $t = 0$. Justifique.

(1.5 val.) b) Determine a posição final da partícula, *i.e.* calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$. Justifique.