Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Teste e 1º Exame - 20 de Janeiro 2000 - 9 horas

2º Teste: Grupos 4, 5 e 6 - 1º Exame: Todos os grupos

Duração: Teste 90 minutos - Exame 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido em $\mathbb{R}^3$ descrito por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,; \ \ x^2 + y^2 \geq z^2\}.$$

(2) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ).

(2) b) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados em coordenadas cilindricas (ρ, θ, z).

(1) c) Calcule a massa de um corpo com a forma de S e densidade de massa dada por $f(x, y, z) = z^2$.

(3) 2. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x + y < 1; \ \ 0 < y < x\}.$$

Calcule

$$\int_A e^{-(x+y)^4}(x^2 - y^2)dxdy.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

(2) 3. Considere a curva fechada E definida por

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1\}.$$

Determine o ponto de E mais próximo da recta $x + y = 4$.

4. Considere a superfície M definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \cos(x^2 + y^2); \;\; x^2 + y^2 < \pi\}.$$

(1.5) a) Determine os espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0, 0)$.

(1.5) b) Escreva uma expressão para a área de M em termos de um integral múltiplo. *Não necessita de calcular o integral.*

5. Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; \;\; y > 0\}.$$

Seja n a normal unitária a S cuja componente segundo y é negativa.

(2) a) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (z^2y^3, yz^2, x^2y^3)$ através de S segundo n.

(2.5) b) Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (-z\alpha + x, \sqrt{\alpha}(x^2 + y^2 + z^2), \alpha x + z),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcule α de modo a que o fluxo de $rot\, G$ através de S segundo n seja igual a 10π.

(1.5) 6. a) Calcule $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx$. Justifique cuidadosamente a resposta.

(1) b) Determine se a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

é ou não integrável no intervalo $[0, \infty[$.