

## Análise Matemática III

1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 13h00

Duração: 1h30m

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x + y \leq 4, 2 \leq x - y \leq 4\}$$

e seja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

(3) a) Escreva uma expressão para  $\int_S f$  em termos de integrais iterados da forma  $\int \left( \int dy \right) dx$ .

(3) b) Calcule o integral  $\int_S f$  usando a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = \sqrt{u+1} + \sqrt{v+1} \\ y = \sqrt{u+1} - \sqrt{v+1} \end{cases}$$

definida no conjunto  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > -1, v > -1\}$ .

2. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

(3) a) Escreva uma expressão para o volume de  $V$  em termos de um integral iterado da forma

$$\int \left( \int \left( \int dy \right) dx \right) dz$$

(3) b) Calcule o volume de  $V$  da forma que preferir.

3. Considere o campo vectorial  $F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$  definido em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

(2) a) Mostre que o campo é fechado.

(3) b) Calcule o integral de linha de  $F$  ao longo de um caminho fechado simples que percorre a circunferência de raio 1 centrada na origem uma vez no sentido directo.

(3) 4. Seja  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função tal que  $f^2 : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função limite superior em  $]0, 1[$ . Mostre que  $f$  é uma função limite superior em  $]0, 1[$ .