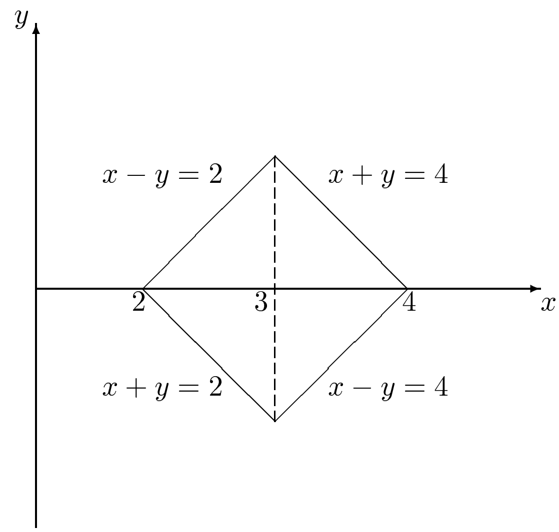
**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 13h00

1. a) A região $S$ tem o seguinte aspecto:




Portanto uma expressão para o integral é dada por

$$\int_S f = \int_2^3 \int_{2-x}^{x-2} (x^2 - y^2)dydx + \int_3^4 \int_{x-4}^{4-x} (x^2 - y^2)dydx$$

b) O jacobiano da transformação

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u+1} + \sqrt{v+1} \\ y &= \sqrt{u+1} - \sqrt{v+1} \end{aligned}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u+1}} & \frac{1}{2\sqrt{v+1}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u+1}} & -\frac{1}{2\sqrt{v+1}} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{(u+1)(v+1)}} \end{aligned}$$

Nas novas variáveis $(u, v) \in ]1, +\infty[\times]1, +\infty[$ o conjunto $S$ é definido pelas condições

$$\begin{aligned} x + y \geq 2 &\Leftrightarrow \sqrt{u+1} \geq 1 \Leftrightarrow u \geq 0 \\ x + y \leq 4 &\Leftrightarrow \sqrt{u+1} \leq 2 \Leftrightarrow u \leq 3 \\ x - y \geq 2 &\Leftrightarrow \sqrt{v+1} \geq 1 \Leftrightarrow v \geq 0 \\ x - y \leq 4 &\Leftrightarrow \sqrt{v+1} \leq 2 \Leftrightarrow v \leq 3 \end{aligned}$$

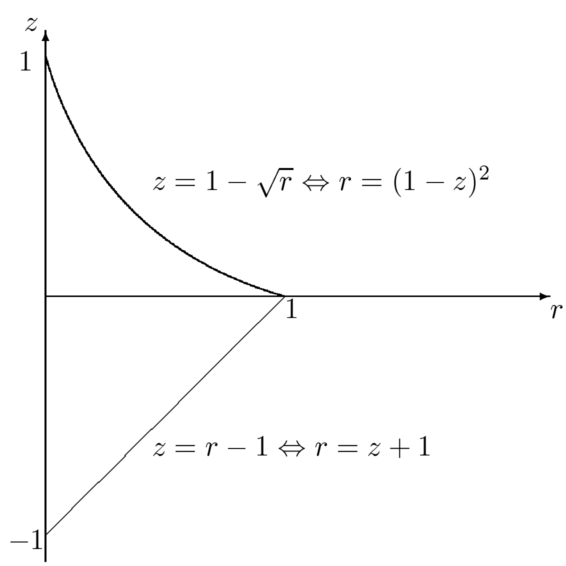
Finalmente, a função $f$ escrita nas novas variáveis é

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 4\sqrt{(u+1)(v+1)}$$

Portanto, pelo teorema de mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
\int_S f &= \int_0^3 \int_0^3 4\sqrt{(u+1)(v+1)} \frac{1}{2\sqrt{(u+1)(v+1)}} dudv \\
&= \int_0^3 \int_0^3 2dudv \\
&= 18
\end{aligned}$$

2. a) Fazendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $V$ é definido por $r - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{r}$. Portanto $V$ é a seguinte região plana rodada em torno do eixo $Oz$:




Para cada valor de $z$ fixo, $x$ e $y$ variam num círculo com o raio indicado na figura acima. Assim, uma expressão para o volume é dada pelo integral iterado:

$$\int_{-1}^{0} \int_{-(1+z)}^{1+z} \int_{-\sqrt{(1+z)^2-x^2}}^{\sqrt{(1+z)^2-x^2}} 1\, dydxdz +$$

$$\int_{0}^{1} \int_{-(1-z)^2}^{(1-z)^2} \int_{-\sqrt{(1-z)^4-x^2}}^{\sqrt{(1-z)^4-x^2}} 1\, dydxdz$$

b) As coordenadas mais adequadas ao cálculo deste integral são coordenadas cilíndricas centradas no eixo $Oz$. Tendo em conta a figura acima obtemos a seguinte expressão para o volume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(V) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r-1}^{1-\sqrt{r}} r\,dz dr d\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 (1-\sqrt{r}-r+1)r\,dr \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

3. a)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Como as derivadas cruzadas são iguais, o campo é fechado.

b) Como $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ não é simplesmente conexo não podemos concluir da alínea anterior que o campo é gradiante. No entanto, podemos ver se existe um potencial $V(x,y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow V(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C$$

Portanto o campo é gradiante, o que implica, que o integral ao longo de qualquer caminho fechado em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ é 0.

Alternativamente pode calcular-se o integral directamente: Uma parametrização para a curva é $g(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$. Portanto o integral em questão é dado por

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos t}{1}, \frac{\mathrm{sen} t}{1}\right).(-\mathrm{sen} t, \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

4. Seja $\{s_k\}$ uma sucessão de funções em escada definidas em $]0,1[$ tais que

i) $s_k(x) \leq s_{k+1}(x)$ q.t.p. em $]0,1[$

ii) $s_k(x) \longrightarrow f^2(x)$ q.t.p. em $]0,1[$

iii) $\{\int_0^1 s_k\}$ é uma sucessão limitada

Sem perda de generalidade podemos assumir que $s_k(x) \geq 0$ para todo o $x \in ]0,1[$ (Podemos sempre substituir $s_k(x)$ por $\max(s_k(x), 0)$. Esta sucessão satisfará óbviamente as duas primeiras condições e quanto à terceira: $\int_0^1 \max(s_k(x), 0) \leq \int_0^1 f^2$ ).

Defina-se $t_k(x) = \sqrt{s_k}(x)$. Então $t_k$ é uma função em escada e

i) $t_k(x) \leq t_{k+1}(x)$ q.t.p. em $]0,1[$ já que a raíz quadrada é uma função crescente.

ii) $t_k(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p. em $]0,1[$ já que a raíz quadrada é uma função contínua.

iii) Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $\int_0^1 s_k \leq M$. Sejam $I_{k,j}$ os subintervalos de uma partição de $]0,1[$ onde $s_k$ é constante e $s_{k,j}$ o valor assumido por $s_k$ no interior de $I_{k,j}$.

Então

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t_k &= \sum_j \sqrt{s_{k,j}} \mathrm{Vol}(I_{k,j}) \\
&= \sum_{\{j: s_{k,j} > 1\}} \sqrt{s_{k,j}} \mathrm{Vol}(I_{k,j}) + \sum_{\{j: s_{k,j} \leq 1\}} \sqrt{s_{k,j}} \mathrm{Vol}(I_{k,j}) \\
&\leq \sum_{\{j: s_{k,j} > 1\}} s_{k,j} \mathrm{Vol}(I_{k,j}) + \sum_{\{j: s_{k,j} \leq 1\}} 1 \mathrm{Vol}(I_{k,j}) \\
&\leq \int_0^1 s_k + 1 \\
&\leq M + 1
\end{aligned}
$$

portanto $\{\int_0^1 t_k\}$ é uma sucessão limitada.

Concluímos que $f$ é uma função limite superior, conforme pretendíamos demonstrar.