**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Análise Matemática III - 2S - 99/00
## 2º Teste / 1º Exame - 26.06.2000
## Resolução

1. Dado que, para $|x| \leq 1$, temos $|x^3| \leq |x|$, então

$$\begin{aligned} vol_2(A) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left( \int_{|x^3|}^{|x|} dy \right) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left( \int_{-x^3}^{-x} dy \right) dx + \int_{0}^{1} \left( \int_{x^3}^{x} dy \right) dx \end{aligned}$$

2. a) O sólido $V$ é limitado pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e pelo cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, temos

$$V = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, , \, x \geq 0 \, , \, y \geq 0\}$$

A esfera e o cone intersectam-se segundo a linha dada pelas equações

$$z = \sqrt{2} \; ; \; x^2 + y^2 = 2$$

e, portanto, na direcção $z$ o sólido $V$ apresenta duas regiões distintas:

i) Fixando $z$ no intervalo $[0, \sqrt{2}]$, obtemos o quarto de círculo em $xy$, de raio $z$ e definido por

$$\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \, , \, x \geq 0 \, , \, y \geq 0\}$$

ii) Fixando $z$ no intervalo $[\sqrt{2}, 2]$, obtemos o quarto de círculo em $xy$, de raio $\sqrt{4 - z^2}$ e definido por

$$\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{4 - z^2}\, , \, x \geq 0 \, , \, y \geq 0\}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} vol_3(V) &= \int_{0}^{\sqrt{2}} \left( \int_{0}^{z} \left( \int_{0}^{\sqrt{z^2 - y^2}} dx \right) dy \right) dz + \\ &+ \int_{\sqrt{2}}^{2} \left( \int_{0}^{\sqrt{4 - z^2}} \left( \int_{0}^{\sqrt{4 - z^2 - y^2}} dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$

b) Em coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta, z)$, $V$ é dado por

$$\rho \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2} \; ; \; \rho \cos\theta \geq 0 \; ; \; \rho \,\mathrm{sen}\, \theta \geq 0$$

e, tendo em conta que a esfera e o cone se intersectam para $z = \sqrt{2}$ ; $\rho^2 = 2$, temos

$$\rho \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2} \; ; \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \; ; \; 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$$

Assim, o volume de $V$ é dado por

$$vol_3(V) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{0}^{\sqrt{2}} \left( \int_{\rho}^{\sqrt{4 - \rho^2}} \rho \, dz \right) d\rho \right) d\theta$$

c) Em coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$, temos

$$r \leq 2 \; ; \; r \cos\phi \geq r \operatorname{sen}\phi \; ; \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ou seja

$$r \leq 2 \; ; \; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \; ; \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} vol_3(V) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^2 r^2 \operatorname{sen}\phi \, dr \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

3. Consideremos a transformação linear $(u, v) = g(x, y)$ definida por

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= x - 2y \end{aligned}$$

Sendo linear, para que $g$ seja uma transformação de coordendas basta que a matriz que a representa seja não singular. (Recorde-se que para uma transformação linear a matriz que a representa e a sua derivada coincidem). Assim, $g$ é uma transformação de coordenadas porque

$$\det Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$$

Seja $T = g(S)$, ou seja, a imagem de $S$ através da transformação $g$. Da definição de $S$, obtemos

$$T = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \pi \; ; \; 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned} \int\int_S \operatorname{sen}(x + y)\cos(x - 2y) dx dy &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(u)\cos(v) dv \right) du \\ &= \frac{1}{3} \left( \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(u) du \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v) dv \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. a) Devido à simetria cilíndrica, $M$ pode ser parametrizada pela seguinte função

$$g(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \rho^3) \; ; \; 0 < \rho < 2 \; ; \; 0 < \theta < 2\pi$$

donde se conclui que

$$g(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = (1, 1, \sqrt{8})$$

O espaço tangente no ponto $(1,1,\sqrt{8})$ é gerado pelas colunas da matriz derivada $Dg(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$. Assim, dado que

$$Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \\ 3\rho^2 & 0 \end{bmatrix}$$

temos

$$Dg(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o espaço tangente a $M$ no ponto $(1,1,\sqrt{8})$ é gerado pelos vectores

$$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},6)\ ;\ (-1,1,0)$$

ou, equivalentemente, pelos vectores

$$(1,1,6\sqrt{2})\ ;\ (-1,1,0)$$

b) Usando a parametrização da alínea anterior, a área de $M$ é dada por

$$vol_2(M) = \int\int_T \sqrt{\det Dg^t Dg}\,d\rho d\theta$$

em que $T = ]0,2\pi[\times]0,2[$ e $Dg^t$ designa a transposta da matriz $Dg$.
Da alínea anterior, obtemos

$$Dg^t Dg = \begin{bmatrix} 1+9\rho^4 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$vol_2(M) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \rho\sqrt{1+9\rho^4}\,d\rho\right)d\theta$$

c) Sendo $M$ dada por uma parametrização, trata-se de uma superfície orientável e, assim, podemos usar o teorema de Stokes para calcular o fluxo de $rot f$ através de $M$ segundo a normal com terceira componente negativa.
Da definição de $M$, a respectiva fronteira ou bordo é a circunferência definida por

$$\partial M = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4\ ;\ z = 8\}$$

Assim, temos

$$\int\int_M rot f\cdot\nu = \int_{\partial M} f\cdot d\gamma$$

em que $\gamma$ é o caminho que descreve $\partial M$ no sentido negativo para que seja compatível com a orientação de $M$ induzida pela normal $\nu$ que tem terceira componente negativa.
Portanto,

$$\gamma(t) = (2\cos t, -2\,\mathrm{sen}\,t, 8)\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

e temos

$$\begin{aligned}
\int\int_M rot f\cdot\nu &= \int_{\partial M} f\cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi}(16\,\mathrm{sen}\,t,\ 16\cos t,\ -64\cos^3 t\ \mathrm{sen}^3 t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\,t,\ -2\cos t,\ 0)dt \\
&= -64\pi
\end{aligned}$$

d) Da alínea anterior, o integral de linha de $f$ ao longo de $\partial M$ não é nulo. Sendo $\partial M$ uma linha fechada, concluimos que o campo $f$ não é um gradiente.

5. Vamos aplicar o teorema da divergência ao campo $h$ e à pirâmide $P$

$$\int\int\int_P div h = \int\int_{\partial P} h \cdot \nu$$

em que $\nu$ designa a normal unitária e exterior a $P$.

A pirâmide $P$ é limitada pelas seguintes superfícies planas

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) : x+y+z=1 \ ; \ 0<x<1 \ ; \ x+y<1\} \\ P_z &= \{(x,y,z) : z=0 \ ; \ 0<x<1 \ ; \ x+y<1\} \\ P_x &= \{(x,y,z) : x=0 \ ; \ 0<y<1 \ ; \ y+z<1\} \\ P_y &= \{(x,y,z) : y=0 \ ; \ 0<x<1 \ ; \ x+z<1\} \end{aligned}$$

e pretende-se calcular o fluxo de $h$ através de $S$ segundo a normal exterior a $P$.

Dado que

$$div h = 0$$

obtemos

$$\int\int_S h \cdot \nu = -\int\int_{P_z} h \cdot \nu_z - \int\int_{P_x} h \cdot \nu_x - \int\int_{P_y} h \cdot \nu_y$$

em que $\nu_z, \nu_x, \nu_y$ designam, respectivamente, as normais unitárias e exteriores aos planos $P_z, P_x, P_y$, ou seja

$$\begin{aligned} \nu_z &= (0,0,-1) \\ \nu_x &= (-1,0,0) \\ \nu_y &= (0,-1,0) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h \cdot \nu_z &= 0 \\ h \cdot \nu_y &= 0 \\ h \cdot \nu_x &= 3 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int\int_S h \cdot \nu = 3vol_2(S) = \frac{3}{2}$$

6. Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Sendo a circunferência dada pela equação $x^2+y^2=1$, consideremos os pontos estacionários da função

$$g(x,y) = x - y + \lambda(x^2+y^2-1)$$

sobre a circunferência dados pelo sistema

$$\begin{aligned} 1+2\lambda x &= 0 \\ -1+2\lambda y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Da primeira e da segunda equações, obtemos

$$y = -x$$

e, da terceira obtemos os pontos estacionários

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \ ; \ (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Sendo

$$\begin{aligned} f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) &= -\sqrt{2} \\ f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

concluimos que o ponto de máximo é dado por

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

7. Dado que $f$ é uma função contínua no intervalo $I = ]0, \infty[$, é integrável em qualquer intervalo compacto $[a, b] \subset ]0, \infty[$. Assim, consideremos a sucessão de funções $(f_k)$ , $k = 1, 2, \ldots$ definidas por

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } \frac{1}{k} \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então,

i) A sucessão $(f_k)$ é crescente porque $f > 0$.

ii) $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ qtp.

iii) A sucessão de integrais $(\int_I f_k)$ é convergente. De facto, temos

$$\int_I f_k = \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = 2(e^{-\frac{1}{k}} - e^{-k}) \to 2$$

Pelo teorema da convergência monótona, concluimos que $f$ é integrável em $I$ e

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k = 2$$