Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação / Exame - 27 de Janeiro de 2014 - 12h - Versão 2
Duração: 1h30 (Teste) / 3h Exame

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste 1

(1.5 val.) 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{(x^2+3y^2)^2} + 5, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ b, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine, justificando, o valor de b para que f seja contínua na origem.

(1.5 val.) 2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a função definida por

$$h(x,y) = (5x, x^2y, 2x + y^2)$$

e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $Dg(-5,1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada de $g \circ h$ no ponto $(-1,1)$ segundo o vector $v = (-1,1)$.

(1.5 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + xy + z^3 - 3z.$$

4. Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 0 < y < x < 1, \quad 2x^2 < z < 3 - x^2\}.$$

(1.5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$ e da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(1 val.) b) Calcule o volume de V.

(1.5 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2 - \sqrt{x^2+y^2} < z < \sqrt{x^2+y^2}, \ \ x^2+y^2 < 4, \ \ y > 0\}.$$

(1.5 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^5 tal que as únicas derivadas parciais não nulas de f até à ordem 4 no ponto $(0,0)$ são $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$ e $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0)$. Sabendo que

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) + 6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0)\right) < 0,$$

mostre que f tem um ponto de sela em $(0,0)$.

Teste 2

7. Considere o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0, \; y - x = 0\}$$

(0,5 val.) a) Mostre que C é uma variedade e determine a sua dimensão.

(0,5 val.) b) Determine o espaço normal a C no ponto $(0, 0, \sqrt{6})$.

(1 val.) c) Justifique que a função $f(x, y, z) = y$ tem uma máximo e um mínimo em C e determine os seus valores.

8. Considere a função

$$G(x, y, z) = f(x, z) + \sin(xy + \pi z)$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $f(1, 1) = 0$ e $\nabla f(1, 1) = (1, 0)$.

(1 val.) a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(1, 0, 1)$ onde a equação $G(x, y, z) = 0$ define y como função de classe C^1 de x e z.

(0,5 val.) b) Calcule $\frac{\partial y}{\partial x}(1, 1)$.

(1 val.) 9. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $G(x, y, z) = \left(3x^2y, x^3 + 3y^2z, y^3\right)$ ao longo do caminho

$$(2\cos t, f(t), 2\sin t), \; t \in [0, 2\pi],$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 que satisfaz $f(0) = \pi$ e $f(2\pi) = 1$.

10. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 1 < z < 2, \; z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

orientada com a normal unitária n com terceira componente positiva.

(1 val.) a) Calcule a massa de S sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x, y, z) = z^2$.

(1.5 val.) b) Determine o fluxo do campo $F(x, y, z) = (e^{z^2} + 3x, -2y + \sin x^2, -z + 2)$ através de S no sentido de n.

(1,5 val.) c) Calcule, usando o Teorema de Stokes, o trabalho do campo $G(x, y, z) = (0, 1 - z, 0)$ ao longo de ∂S percorrido no sentido induzido por n.

(1,5 val.) 11. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável tal que ∂M é uma circunferência, e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 tal que $\operatorname{rot} F$ é tangente a M em cada ponto. Mostre que existe um ponto de ∂M onde F é normal a ∂M.