Capítulo 3

Aplicações lineares

3.1 Seja $T:R^2 \to R^2$ a multiplicação por $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Quais dos seguintes vectores estão em $\operatorname{Im}(T)$?

i) $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix}$

b) Quais dos seguintes vectores estão em $Ker(T)$?

i) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) Qual a dimensão da imagem e a nulidade de T.

3.2 Seja $T:R^4 \to R^3$ a multiplicação por $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Quais dos seguintes vectores estão em $\operatorname{Im}(T)$?

i) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Quais dos seguintes vectores estão em $Ker(T)$?

i) $\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) Qual a dimensão da imagem e a nulidade de T?

d) A transformação é injectiva? Sobrejectiva?

3.3 Seja $T:P_2 \to P_3$ a transformação definida por $T(p(x)) = xp(x)$.

a) Quais dos seguintes vectores estão em $\operatorname{Im}(T)$?

i) $x + x^2$ ii) $1 + x$ iii) $3 - x^2$

b) Quais dos seguintes vectores estão em $Ker(T)$?

i) x^2 ii) 0 iii) $x+1$

c) Qual a dimensão da imagem e a nulidade de T?

d) A transformação é injectiva? Sobrejectiva?

3.4 Considere a base $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ para R^3, $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(2,5,3)$ e $v_3=(1,0,10)$, e seja $T:R^3\to R^3$ uma transformação linear, tal que $T(v_1)=(1,0)$, $T(v_2)=(1,0)$ e $T(v_3)=(0,1)$. Encontrar fórmula para $T(x_1,x_2,x_3)$ e calcule $T(1,1,1)$.

3.5 Considere a transformação linear $T:P_2\to P_2$, tal que $T(1)=1+x$, $T(x)=3-x^2$ e $T(x^2)=4+2x+3x^2$.

a) Encontrar fórmula para $T(a_1+a_2x+a_3x^2)$ e calcule $T(-3+2x-x^2)$.

b) A transformação é injectiva? Sobrejectiva? Se possível calcule a sua inversa.

3.6

a) Encontrar bases para os espaços imagem, núcleo e suas respectivas dimensões quando T é a multiplicação pela matriz dada.

i) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 5 & 6 & -4\\ 7 & 4 & 2\end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix}4 & 1 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8\end{bmatrix}$

b) Cada transformação é injectiva? Sobrejectiva? Se possível calcule cada uma das suas inversas.

3.7 Seja $T:R^3\to R^3$ a multiplicação pela matriz $\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 7\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

a) Mostre que o núcleo de T é uma recta que passa pela origem e encontre as suas equações paramétricas.

b) Mostre que a imagem de T é um plano e encontre uma equação para este plano.

c) A transformação é injectiva? Sobrejectiva?

3.8 Provar:

Se $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ é uma base de V e se $w_1,w_2,\dots,w_n$ são vectores em W, não necessariamente distintos, então existe um transformação linear $T:V\to W$ tal que $T(v_i)=w_i$ $i=1,2,\dots,n$.

3.9 Seja $T: V \to V$ um operador linear num espaço de dimensão finita *V*. Provar que $R(T) = V$ sse $Ker(T) = 0$.

3.10 Seja $D: P_4 \to P_2$ a derivação $D(p(x)) = \dfrac{dp(x)}{dx} = p'(x)$. Prove que D é uma aplicação linear e caracterize o seu núcleo.

3.11 Seja $T: P_3 \to P_3$ dada por $T(p(x)) = p'(x) - 2p(x)$.

a) Obtenha a matriz da transformação na base canónica.

b) Caracterize o seu núcleo.

c) Obtenha a sua inversa.

d) Resolva $T(p(x)) = x^3 - 2$.

3.12 Seja $I: P_3 \to R$ a integração no intervalo $[-1,1]$ $I(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$.

a) Prove que I é uma aplicação linear.

b) Caracterize o seu núcleo.

c) Obtenha a sua matriz na base canónica.

d) Caracterize o seu núcleo, a aplicação tem inversa?

e) Resolva $I(p(x)) = 1$. Qual a solução da equação homogénea, qual a solução particular.

3.13 Seja $T: P_3 \to P_3$ $T(p(x)) = I(p(x)) + p(x) = \int_{-1}^{1} p(x)dx + p(x)$.

a) Prove que I é uma aplicação linear.

b) Caracterize o seu núcleo.

c) Obtenha a sua matriz na base canónica.

d) Caracterize o seu núcleo, a aplicação tem inversa?

e) Resolva $I(p(x)) = 1$. Qual a solução da equação homogénea, qual a solução particular.

3.14 a) Encontre a matriz que representa, na base canónica, cada uma das transformações lineares indicadas:

i) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ ii) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$

iii) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 5x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ iv) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 5x_2 \\ -2x_3 \end{bmatrix}$

v) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 \end{bmatrix}$ vi) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$

b) Resolva a equação $T(y) = b$ sempre que possível, a transformação T indicada corresponde a cada uma das transformações da alínea a) e em que b toma os valores:

i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ v) $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$

3.15 Encontre a matriz, na base canónica, que representa as seguintes transformações em R^3:

a) Transformação do vector (x, y, z) na sua reflexão em relação ao plano xy.

b) Transformação do vector (x, y, z) na sua reflexão em relação ao plano xz.

c) Transformação do vector (x, y, z) na sua reflexão em relação ao plano yz.

d) Rotação de 90º do vector (x,y,z) no sentido directo em torno do eixo dos zz.

e) Rotação de 90º do vector (x,y,z) no sentido directo em torno do eixo dos xx.

f) Rotação de 90º do vector (x,y,z) no sentido directo em torno do eixo dos yy.

3.16 Descreva o efeito geométrico da multiplicação de um vector por cada uma das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3.17 Seja r a recta de R^2 que passa pela origem e faz um ângulo ϕ com a parte positiva do eixo dos xx.

a) Mostre que $\begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}$ é a matriz que representa, na base canónica, a reflexão em relação à recta r.

b) Qual a matriz que representa a inversa desta transformação.

3.18 Seja $T: P_2 \to P_1$, uma função dada por: $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + a_3)t$.

a) Encontrar a matriz que representa a transformação nas bases canónicas de P_1 e de P_2.

b) Resolver $T(p(t)) = 1 + 2t$.

3.19 Seja $T: R^2 \to R^3$: $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) Encontrar a matriz da transformação em relação às bases $B = \{u_1, u_2\}$ e $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, em que:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Utilize a matriz calculada em a) para obter a imagem de $\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3.20 Seja $T: R^3 \to R^3$ definida por: $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$

a) Encontrar a matriz da transformação T em relação à base $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

b) Usar a matriz encontrada em a) para obter a imagem de $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) É possível resolver $T(x)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$?

3.21 Seja $v_1=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$, e seja $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & 5\end{bmatrix}$ a matriz para a transformação $T:R^2\to R^2$ em relação à base $B=\{v_1,v_2\}$.

a) Encontrar as componentes de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base B.

b) Encontrar $T(v_1)$ e $T(v_2)$ na base canónica.

c) Encontrar uma fórmula para $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$.

d) Usar a fórmula obtida em c) para calcular $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$.

e) Encontrar a matriz da inversa de T calculada na base B, será a matriz inversa de A.

f) Resolver $T^{-1}(x)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

3.22 Seja $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1 & 0\\1 & 6 & 2 & 1\\-3 & 0 & 7 & 1\end{bmatrix}$ a matriz para a transformação $T:R^4\to P_2$ em relação às bases $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ e $B'=\{w_1,w_2,w_3\}$, t.q.:

$$v_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\ v_3=\begin{bmatrix}1\\4\\-1\\2\end{bmatrix},\ v_4=\begin{bmatrix}6\\9\\4\\2\end{bmatrix}$$

$w_1=2t+2t^2,\ w_2=-7+8t+t^2,\ w_3=-6+9t+t^2$

a) Encontrar as componentes de $T(v_1),\ T(v_2),\ T(v_3),\ T(v_4)$ na base B'.

b) Encontrar $T(v_1),\ T(v_2),\ T(v_3),\ T(v_4)$ na base canónica.

c) Encontrar uma fórmula para $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)$.

d) Usar a fórmula obtida em c) para calcular $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

3.23 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ a matriz para a transformação $T\colon P_2 \to P_2$ em relação à base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, t.q.:

$$v_1 = t + t^2,\quad v_2 = -1 + 3t + 2t^2,\quad v_3 = 3 + 7t + 2t^2$$

a) Encontrar as componentes de $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$ na base B.

b) Encontrar $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$ na base canónica.

c) Encontrar uma fórmula para $T\left(a_0 + a_1 t + a_3 t^2\right)$.

d) Usar a fórmula obtida em c) para calcular $T\left(1 + t^2\right)$.

e) Calcular a nulidade e a dimensão da imagem de *T*. Esta aplicação é injectiva? Sobrejectiva?

f) Resolver $T(y) = 3 + 7t + 10t^2$.

3.24 Sendo $D\colon P_3 \to P_3$ a derivação $D(p(x)) = \dfrac{dp(x)}{dx} = p'(x)$.

a) Qual a matriz de D em relação à base $\{1, t, t^2, t^3\}$? Utilize essa matriz para calcular $D(6 - 6t + 24t^2 + 4t^3)$.

b) Qual a matriz de D em relação à base $\{2, 2-3t, 2-3t+2t^2, 2-3t+t^3\}$? Utilize essa matriz para calcular $D(6 - 6t + 24t^2 + 4t^3)$.

3.25 Encontrar em cada alínea a matriz da transformação derivação, em relação às bases indicadas, $\{f_1, f_2, f_3\}$, de subespaços do espaço das funções reais de variável real.

a) $f_1 = 1,\ f_2 = \sin t,\ f_3 = \cos t$.

b) $f_1 = 1,\ f_2 = e^t,\ f_3 = e^{2t}$

c) $f_1 = e^{2x},\ f_2 = xe^{2x},\ f_3 = x^2e^{2x}$

3.26 Sendo $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$ a fórmula da transformação linear $T: R^2 \to R^2$ e *B* e *B'* bases de R^2.

$$B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad B' = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$$

a) Represente *T* na base *B*.

b) Represente *T* na base *B'* utilizando a matriz calculada em a).

c) Obtenha uma fórmula para a inversa de *T*.

d) Represente T^{-1} na base *B'*.

3.27 Sendo $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 7x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \end{bmatrix}$ a fórmula da transformação linear $T: R^2 \to R^2$ e *B* e *B'* bases de R^2.

$$B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \quad B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

a) Represente *T* na base *B*.

b) Represente *T* na base *B'* utilizando a matriz calculada em a).

c) Obtenha uma fórmula para a inversa de *T*.

d) Represente T^{-1} na base *B'*.

3.28 Sendo $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \\ x_1 + 7x_3 \end{bmatrix}$ a fórmula da transformação linear $T: R^3 \to R^3$ e *B* a base canónica, sendo *B'* a base de R^3:

$$B' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

a) Represente T na base B.

b) Represente T na base B' utilizando a matriz calculada em a).

c) Obtenha uma fórmula para a inversa de T.

d) Represente T^{-1} na base B'.

3.29 Sabendo que existe uma matriz não singular P e duas matrizes A e B, tais que:
$B = P^{-1}AP$, (A e B são semelhantes)

a) Prove que A^2 e B^2 são semelhantes.

b) Prove que A^k e B^k são semelhantes, sendo k uma constante natural.

3.30 Sejam C e D duas matrizes $m \times n$ quaisquer. Demonstre:

Se $Cx = Dx$ para todo o vector x de R^n, então $C = D$.

3.31 Sejam V e W dois espaços lineares, T, T_1 e T_2 transformações lineares de V para W e k um escalar. Sejam as transformações $T_1 + T_2$ e kT, definidas por:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x), \forall x \in V$$

$$(kT)(x) = k\big(T(x)\big), \forall x \in V$$

a) Prove que $T_1 + T_2 : V \to W$ e $kT : V \to W$ são transformações lineares.

b) Mostre que as transformações lineares de um espaço linear noutro, com as operações definidas acima é um espaço vectorial.

3.32 Seja $T : V \to V$ uma transformação linear num espaço linear de dimensão n (finito). Prove que um e um só destas afirmações se verifica:

1. A equação $T(x) = b$ tem solução para todos os vectores b em V.

2. A nulidade de T é maior que zero.

3.33 Para todo o real c os vectores:

$$1, t-c, \frac{(t-c)^2}{2!}, \ldots, \frac{(t-c)^n}{n!}$$

formam base para P_n. Encontre a matriz para o operador derivação em relação a esta base. Esta aplicação tem inversa? Justifique.

3.34 Seja $J : P_n \to P_{n+1}$ a transformação definida por:

$$J(p(t)) = \int (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n)dt = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2} + \frac{a_2 t^3}{3} + \ldots + \frac{a_n t^{n}}{n+1}$$

onde $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$. Encontrar a matriz de J às bases canónicas de P_n e de P_{n+1}. Esta aplicação tem inversa? Justifique.

3.35 Seja M o espaço linear real das matrizes reais 2×2 e considere em M a base formada pelas 4 matrizes seguintes:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ determine na base anterior, qual a matriz que representa a aplicação linear $T: M \to M,\ T(X) = AX - XA,$ onde AX e XA são os produtos matriciais usuais.

b) Obtenha uma base para o núcleo de T.

c) Calcule a dimensão e indique uma base para o subespaço imagem de T.

d) Determine a matriz que representa T na base formada pelas quatro matrizes seguintes:

$$E_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2' = E_2\ ,\ E_3' = E_3\ ,\ E_4' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(Exames)

3.36 Seja P_3 o espaço linear real dos polinómios de grau menor ou igual a 3 e considere a transformação linear $T: P_3 \to R^4$ definida por:

$$T(p_1) = x,\ \ T(p_2) = y,\ \ T(p_3) = z,\ \ T(p_4) = 0.$$

em que:

$$p_1(t) = 1 + t,\ \ p_2(t) = t + t^2,\ \ p_3(t) = 1 + t^2,\ \ p_4(t) = t^3,\ \ t \in R$$
$$x = (1,0,0,1),\ \ y = (0,1,\text{-}1,0),\ \ z = (1,0,0,1).$$

a) Mostre que o conjunto $P = \{p_1, p_2, p_3, \mathrm{p}_4\}$ é linearmente independente.

b) Obtenha um vector $w \in R^4$ por forma a que o conjunto $B = \{x, y, z, t\}$ seja uma base de R^4.

c) Aplique o método de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto B para obter uma base ortogonal $\tilde{B}$ de R^4, usando o produto interno usual.

d) Obtenha a matriz que representa T em relação às bases P de P_3 e $\tilde{B}$ de R^4.

e) Determine o vector $\tilde{b}$, a projecção ortogonal do vector $b = (-3, 2, 2, 1)$ sobre o subespaço gerado pelos vectores x,y e z.

f) Resolva a equação (isto é, se existirem soluções determine-as):

$$T(p) = \tilde{b}\ .$$

(Exames)

3.37 Considere a transformação linear $F: C^3 \to C^3$ que em relação à base canónica de C^3, tem representação matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule os valores próprios e os vectores próprios de F e identifique, justificando, se existe uma base de C^3 em relação à qual a representação matricial de F seja diagonal. Em caso afirmativo, indique uma tal base, a correspondente representação diagonal $\Lambda = S^{-1}AS$.

b) Resolva a alínea precedente para o caso em que F é definida como indicado, mas substituindo C^3 por R^3.

c) Prove que existe $n \in N$ tal que $F^n = I$ e calcule o menor n com esta propriedade. Prove que A é não singular e determine as matrizes A^k, para todo o $k \in N$, naturalmente considerando $A^{-m} = (A^{-1})^m$, para $m \in N$.

(Exames)

3.38 Seja $M^{2,2}$ o espaço linear das matrizes 2×2 de elementos reais e considere a transformação linear $R: M^{2,2} \to M^{2,2}$ definida por:

$$R\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3a+4d & 3b+4c \\ 4b-3c & 4a-3d \end{bmatrix}$$

a) Determine a matriz A que representa R em relação à base canónica de $M^{2,2}$. Verifique que é válida a relação $A^2 = 25I$, em que I é a matriz identidade

b) Mostre que R é invertível e determine a sua inversa.

c) Resolva a equação linear

$$R(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Exames)

Capítulo 4

Projecções, comprimento e ortogonalidade

4.1 (Fachada) Diga como se devem escolher os escalares reais $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de modo a que a expressão:

$$\langle x, y \rangle = \alpha x_1 y_1 + \beta x_1 y_2 + \gamma x_2 y_1 + \delta x_2 y_2$$

defina um produto interno dos vectores $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$.

4.2 (João Alves) Um barco à vela demora $\left\{\left[(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)\right]^2 + 3(x_1 - y_1)^2\right\}^{1/2}$ horas para se deslocar no mar do ponto $x = (x_1, x_2)$ ao ponto $y = (y_1, y_2)$. Diga qual a direcção que o barco deverá seguir para, partindo do ponto (3,1) atingir, o mais rapidamente possível, a recta de equação $x_2 = x_1$.

4.3 (Fachada) No espaço vectorial dos polinómios de $grau \leq n$, P_n, definimos o produto interno de dois polinómios $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n$, através da expressão $\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$.

a) Determine os complementos ortogonais dos subespaços:

i) $L = \{p \in P_n : p(1) = 0\}$ ii) $M = \{p \in P_n : p(-t) = p(t)\}$

b) Calcule a distância de um polinómio arbitrário $x(t) \in P_n$ aos subespaços L, M da alínea a).

*4.4 No espaço vectorial dos polinómios de $grau \leq n$, P_n, definimos o produto interno de dois polinómios $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n$, através da expressão $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t) q(t) dt$.

a) Determine os complementos ortogonais dos subespaços:

i) $L = \{p \in P_n : p(1) = 0\}$ ii) $M = \{p \in P_n : p(-t) = p(t)\}$

b) Calcule a distância de um polinómio arbitrário $x(t) \in P_n$ aos subespaços L, M da alínea a).

c) Utilize este produto interno para transformar $\{1, t, t^2, t^3\}$ numa base ortonormal de P_3.

4.5 Utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz para demonstrar que para $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos, se tem

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

4.6 R^3 é espaço linear real com operações usuais, seja em $R^3 \times R^3$ a seguinte função:

$$\langle x, y\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ em que } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

a) Prove que $\langle .,. \rangle$ é um produto interno em R^3.

b) Ortogonalize os vectores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)$.

c) Determine a projecção ortogonal de (1,1,1) sobre o espaço gerado por $\{v_1, v_2\}$.

4.7 Seja $T: E \to E$ uma aplicação sobrejectiva num espaço euclideano E e tal que

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x, y \in E. \text{ (}T\text{ é unitária)}$$

a) Prove que T é injectiva, e que a sua inversa satisfaz:

$$\langle T^{-1}x, T^{-1}y\rangle = \langle x, y\rangle \text{ e } \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{-1}y\rangle, \forall x, y \in E$$

b) Prove que T é linear.

c) Prove que T preserva o produto vectorial, ou seja $Tx \wedge Ty = T(x \wedge y)$.

d) Prove que $\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in E$.

4.8

1. Seja M_2 o espaço linear real das matrizes 2×2 e o produto interno em M_2 definido por:

$$\langle A, B\rangle = tr(A^t B)$$

em que A^t representa a transposta de $A \in M_2$ e $trA = \sum_{i=1}^{2} a_{ii}$.

a) Determine o complemento ortogonal em M_2 do subespaço das matrizes diagonais.

b) Determine uma base para o subespaço de M_2 de traço nulo. Indique o complemento ortogonal deste subespaço.

2. Definido o produto interno em C^2 por:

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 \;\; ; \;\; z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2)$$

verifique se a função definida em C^2 por:

$$f(z) = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}},$$

é uma norma.

(Exames)

4.9 Sendo V o espaço linear real das matrizes 3×3 e sendo $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$, define-se em V a seguinte operação:

$$\langle A, B \rangle = tr(A^t B).$$

(nota: se $A = [a_{ij}](n \times n)$, $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$)

1- Mostre que $\langle .,. \rangle$ é um produto interno.

2- Seja S o subconjunto de V das matrizes triangulares superiores com diagonal nula. Mostre que S é um subespaço, determine a sua dimensão e apresente uma base.

3- Determine o elemento de S mais próximo da matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4- Sendo $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ matrizes reais de dimensão $(n \times n)$ mostre que:

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \right|^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}{}^2 \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}{}^2 \right)$$

(Exames)

4.10

1- Considere em E o subconjunto do espaço linear real das funções reais definidas em $[-1,1] \subset R$ que pertencem à expansão linear do conjunto $C = \{f_1, f_2, f_3\}$ com $f_1 = 1, f_2 = t, f_3 = t^2$ para todo o $t \in [-1,1]$. Defina um produto interno em E da seguinte forma:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt \quad \forall_{(f,g) \in E^2}$$

a) Determine uma base ortonormada para E.

b) Determine o elemento de E mais próximo de *h*, função definida em $[-1,1]$ por $h(t) = t^4$. (i.e. o elemento *f* de E que minimiza $d(f,h) = \left(\int_{-1}^{1} (f(t) - h(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$)

2- Determine a equação cartesiana da recta perpendicular ao plano dado pela equação cartesiana $x+y+z=2$ e que passa pelo ponto de coordenadas (1,1,1).

3- Sejam π_1, π_2, π_3 três planos dados respectivamente por $x+y+z=1$, , $2x+3y+2z=\alpha$. Calcule α de forma a que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \neq \emptyset$.

(Exames)

4.11

1- Considere C^3 com a seguinte operação definida por:

$$\langle u,v\rangle = 3(u_1+u_2)\overline{(v_1+v_2)} + 2(u_1-u_2)\overline{(v_1-v_2)} + u_3\overline{v_3}$$

para $u=(u_1,u_2,u_3), v=(v_1,v_2,v_3)$ elementos de C^3.

a) Mostre que $\langle,\rangle$ é um produto interno.

b) Determine uma base ortonormada deste espaço euclideano a partir de:

$$C=\{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$$

2-a) Determine a projecção do vector $P-Q$ com $P=(1,2,3)$ e $Q=(1,1,1)$ sobre o plano dado pela equação $x+y+z=3$.

b) Calcule a distância de P ao plano definido por $x+y+z=0$.

(Exames)

4.12

1- Seja V o espaço linear das quádruplas ordenadas de números reais com as operações de adição e de multiplicação usuais.

a) Diga para que valores de $\lambda \in R$ a função definida por

$$P_\lambda(x,y) = \lambda(x_1y_2 + x_2y_1) + \sum_{j=1}^{4} x_j y_j$$

em que $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ e $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, determina um produto interno em V.

b) Considere que em V está definido o produto interno $P_{1/2}$(P_λ para $\lambda=\frac{1}{2}$). Seja U o subespaço de V gerado pelos vectores $u=(1,-1,0,0)$, $v=(1,0,\frac{1}{2},0)$, e $z=(0,2,1,2)$. Determine:

b1) uma base ortonormal para U.

b2) a projecção ortogonal de $w=(2,2,-4,1)$ sobre U.

b3) a projecção ortogonal de $s=(2,2,1,5)$ sobre $U^\perp$.

2- Sejam M e N subespaços de um espaço euclideano de dimensão finita. Mostre que:

se dimM<dimN $\quad M^{\perp} \cap N \neq \{0\}$

(Exames)

4.13

1. Considere em R^4 o produto interno usual. Sejam S e U os subespaços de R^4 definidos por:

$$S = L(\{(3,1,-1,-1),(3,-1,-2,-2),(2,-4,-1,-3)\}) \qquad U = L(\{(2,2,1,3)\})$$

Determine:

a) Uma base de $S^{\perp}$, o complemento ortogonal de S.

b) Uma base ortogonal de $S^{\perp} + U$.

c) As projecções ortogonais do vector $x = (1,1,5,3)$ sobre os subespaços S e $U^{\perp}$.

d) A distância do vector x ao subespaço U.

2. Sejam M e N subespaços de um espaço euclideano. Mostre que é válida a igualdade:

$$(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \bigcap N^{\perp}.$$

(Exames)

4.14

1. Considere o espaço euclideano R^3 com o produto interno usual, e os vectores $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (0,1,4)$, $v_3 = (-8,3,2)$.

a) Ortogonalize o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ utilizando o processo de Gram-Schmidt.

b) Determine uma equação cartesiana do plano que passa por $(2,-1,5)$ e é ortogonal à recta com equação cartesiana

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 7 \\ y + 4z &= 0 \end{aligned}.$$

c) Calcule a projecção ortogonal de $w = (9,-1,-1)$ sobre $L(\{v_1, v_2\})$ e a distância de w ao plano $\{v \in R^3 : v = -w + cv_1 + dv_2, c, d \in R\}$

d) Determine o ângulo entre $(1,2,1)$ e $(2,1,-1)$.

2. Seja V um espaço euclideano complexo e $x, y \in V$. Mostre que são equivalentes as seguintes proposições:

(i) x é ortogonal a y.

(ii) $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|, \forall \alpha \in C$. Aqui $\|z\|$ representa a norma do vector z, definida a partir do produto interno da maneira usual.

(Exames)

4.15

1. Considere em R^3 o produto interno usual.

a) Ortogonalize o conjunto $\{(1,1,-1),(1,-2,2),(2,5,1)\}$ usando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt.

b) Determine uma equação do plano que passa pelo ponto (1,2,3) e é ortogonal à recta com equação cartesiana

$$x+y-z=2$$
$$2x-y+z=1$$

2. Sejam $\lambda \in R$ e f_λ a função definida no conjunto dos pares ordenados de vectores de R^3 por

$$f_\lambda(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + (x_2+\lambda x_3)(y_2+\lambda y_3)$$

onde $x=(x_1,x_2,x_3)$ e $y=(y_1,y_2,y_3)$.

a) Diga para que valores de $\lambda \in R$ a função f_λ determina um produto interno em V.

Para esses valores de λ designa-se por V_λ o espaço euclideano obtido.

b) Seja S o subespaço de $V_1 (V_\lambda$ para $\lambda = 1)$ gerado pelos vectores

$$v_1=(1,1,0), v_2=(3,2,-1), v_3=(4,1,-3),$$

Obtenha uma base ortonormada de S em V_1.

c) Determine em V_1 a projecção ortogonal de $v=(1,1,1)$ sobre S.

d) Determine uma base ortonormada de V_1 que contenha a base ortonormada de S indicada em b).

(Exames)

4.16 Considere a função p definida no conjunto dos pares ordenados de vectores de R^3 por:

$$p(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

onde $x=(x_1,x_2,x_3)$ e $y=(y_1,y_2,y_3)$.

1. Mostre que p define um produto interno em R^3; designe-se por X o espaço euclideano obtido.

2. Seja W o subespaço de X, gerado pelos vectores (1,1,0) e (0,1,1). Determine:

a) $W^\perp$, o complemento ortogonal de W em X.

b) o elemento de W mais próximo do vector (1,2,3).

3. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz, aplicada a vectores adequadamente escolhidos, para mostrar que é válida a desigualdade:

$$(a+2b+3c)^2 \le 6(a^2+c^2+(b+c)^2),$$

para quaisquer valores reais a,b,e c.

(Exames)

4.17 Considere a função p definida no conjunto dos pares ordenados de vectores de R^3 por:

$$p(x,y)=(x_1-x_2)(y_1-y_2)+(x_2-x_3)(y_2-y_3)+x_1y_1$$

onde $x=(x_1,x_2,x_3)$ e $y=(y_1,y_2,y_3)$.

1. Mostre que p define um produto interno em R^3; designe-se por E o espaço euclideano obtido.

2. Considere o subconjunto de E formado pelos vectores

$$v_1=(1,1,-1), v_2=(1,-1,3), v_3=(1,5,3)$$

e seja S o subespaço gerado por esses vectores; obtenha uma base ortonormada de S.

3. Determine em E a projecção ortogonal de $v=(3,1,5)$ sobre S.

4. Determine a distância, em E, de v a S.

(Exames)

4.18 Seja P_n o espaço linear dos polinómios em x com coeficientes reais e grau$\leq n$.

1. Considere em P_2 o produto interno dado por $\langle f(x),g(x)\rangle=a_2b_2+a_1b_1+a_0b_0$, em que $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ e $g(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$, e os polinómios $p_1(x)=3x^2+4x, p_2(x)=7x^2+x+12$.

a) Determine uma base ortonormada para o subespaço L de P_2 gerado por $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

b) Determine a projecção ortogonal de $r(x)=x^2$ sobre o subespaço L.

2. Considere em P_3 os subespaços U e V gerados respectivamente, por

$$u_1=3x^3+10x^2-5x+5, u_2=x^3+5x^2+5, u_3=x^3+4x^2-x+3$$

$$v_1=x^3+2x^2-x+5, v_2=x^3+4x^2+6, v_3=2x^3+2x^2-3x+9.$$

a) Determine a dimensão e obtenha uma base para o subespaço $U+V$.

b) Determinar a dimensão do subespaço $U\cap V$.

(Exames)

4.19 Mostre que todo o espaço vectorial E (pode considerá-lo sobre o corpo real) de dimensão finita, munido de uma função $\langle .,.\rangle : E\times E\to E$ que é simétrica, linear, e não degenerada (i.e. seja $x\in E$ então $\forall y\in E:\langle x,y\rangle=0\Rightarrow x=0$) admite uma base ortonormada. Mostre que neste caso não é válido o método de Gram-Schmidt, usual para o caso em que $\langle .,.\rangle$ é definida positiva (tente um contra-exemplo).