Capítulo 6

Valores próprios e vectores próprios

6.1 Encontrar os valores e vectores próprios das seguintes matrizes:
a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.2 Sabendo que as matrizes do exercício precedente representam transformações lineares $T: R^2 \to R^2$, represente as rectas que se transformam em si próprias por aplicação de *T*.

6.3 Encontrar os valores próprios e os vectores póprios para as seguintes matrizes:
a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

6.4 Encontrar os valores próprios e bases para os espaços próprios das seguintes matrizes:
a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

6.5 Seja $T: R^2 \to R^2$ uma transformação linear definida por
$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$
a) Encontrar os valores próprios da transformação.
b) Encontrar os espaços próprios da transformação.

6.6 Seja $T: M^{2,2} \to M^{2,2}$ uma transformação linear definida por:
$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_{21} & a_{11} + a_{21} \\ a_{12} - 2a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
a) Encontrar os valores próprios de *T*.
b) Encontrar os vectores próprios de *T*.

6.7 Prove que a existência de um valor próprio $\lambda = 0$, para uma transformação linear *T*, é equivalente ao facto de *T* ser não invertível.

6.8 Quais as dimensões dos espaços próprios de cada uma das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

nota- não calcule os vectores próprios.

6.9 Encontre as matrizes unitárias que diagonalizam

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ em que a e $b \neq 0$ são reais.

6.10 Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, com $\xi_1 \neq 0$ e $\xi_2 \neq 0$, tal que $\|\xi\| = 1$, usando a norma proveniente do produto interno usual em R^2; considere a representação de ξ em termos de um vector coluna , $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$, e defina uma matriz R de tipo 2×2 através de $R = \xi\xi^T = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} [\xi_1 \quad \xi_2]$.

1. Mostre que $\lambda = 0$ é um valor próprio de R e determine um vector próprio correspondente, de norma unitária.
2. Determine um outro valor próprio de R e um vector próprio correspondente, de norma unitária. (Lembre que $\|\xi\|^2 = \xi^T \xi = 1$).
3. Seja U a matriz 3×3 definida "por blocos " como segue:

$$U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} R & \xi \\ \xi^T & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que $U^2 = U$ e mostre que se λ é valor próprio de R então também é de U.

4 A matriz $A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}$ é da forma de U com $\xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Afirma-se que "A é diagonizavel como matriz real".

a) Justifique a afirmação anterior

b) Concretize-a, indicando uma matriz diagonal Λ e uma ortogonal P tais que $\Lambda = P^T AP$. (Exames)

6.11 Para cada uma das seguintes matrizes: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$, diga, justificando, se é verdadeira alguma das seguintes afirmações:

- A matriz é semelhante a uma matriz diagonal real.
- A matriz é semelhante a uma matriz diagonal complexa.

Se alguma destas asserções for verdadeira indique uma matriz de semelhança.

<u>Nota</u>: Diz-se que a matriz B é semelhante à matriz A se existir uma matriz invertível U tal que $B = U^{-1}AU$, recebendo U a designação de matriz de semelhança.

2. Seja A uma matriz complexa $n \times n$ tal que $A^* A = I$, em que $A^* = \overline{A}^t$ (a transposta conjugada da matriz que se obtém substituindo cada elemento de A pelo seu omplexo conjugado).

Mostre que se λ é valor próprio de A então $|\lambda| = 1$.

<u>Sugestão</u>: Comece por mostrar que, usando o produto interno usual de C^n, se tem $\langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle$, para qualquer vector $x \in C^n$.

(Exames)

6.12 Considere a transformação linear $F: C^3 \to C^3$ que, em relação à base canónica de C^3, tem representação matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule os valores próprios e os vectores próprios de F e indentifique, justificando, se existe uma base de C^3 em relação à qual a representação matricial de F sejadiagonal. Em caso afirmativo, indique uma tal base, a correspondente representação matricial diagonal Λ e a matriz mudança de base S tal que $\Lambda = S^1 AS$.

b) Resolva a alínea precedente para o caso em que F é definida como indicado, mas substituindo C^3 por R^3.

c) Prove que existe $n \in N$ tal que $F^n = I$ e calcule o menor valor de n com esta propriedade. Prove que A é não-singular e determine as matrizes A^k, para todo o $k \in Z$, naturalmente considerando $A^{-m} = \left(A^{-1}\right)^m$, para $m \in N$.

(Exames)

6.13 Seja A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Determine os valores e os vectores próprios de A.
2. Calcule a matriz P que representa, em relação à base canónica de R^3, a projecção ortogonal (utilizando o produto interno usual em R^3) sobre o espaço próprio de A de maior dimensão.
3. Represente-se por $P_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)}$ é matriz de permutação cuja linha i é e_{α_i}, o elemento α_i da base canónica de R^4, para i de 1 a 4. Calcule o determinante da matriz

$$P_{(1243)} + 2P_{(3124)}$$

4. Sabendo que os valores reais γ e δ são tais que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \delta + \gamma & 2 \end{vmatrix} = 1$$

calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma+\delta^2 & 2\delta \\ \gamma\delta & \gamma & \gamma \end{vmatrix}$$

(Exames)

6.14 Considere o espaço linear V de todos os polinómios, em que as operações de adição de polinómios e multiplicação por um escalar são as operações usuais num espaço de funções. Sejam T, S duas transformações lineares de V em V definidas por: para qualquer $p \in V$

$$T(p)(x) = \frac{dp}{dx}(x) \forall x \in R$$

$$S(p)(x) = xp(x) \forall x \in R$$

1. Mostre que $TS - ST = I_V$, em que I_V representa a identidade em V.
2. Use a alínea anterior para mostrar que não existe $p \in V$ tal que p é simultaneamente vector próprio de T e de S.

(Exames)

6.15 Considere a trnasformação linear $T: R^3 \to R^3$ que em relação à base canónica de R^3 tem a seguinte representação matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Calcule os valores próprios da transformação assim como os correspondentes espaços próprios.
2) Indique justificando se existe uma base de R^3 em relação à qual a representação matricial de T seja diagonal. Em caso afirmativo, indique uma base em relação à qual isso se verifica.

6.16 Classificar as seguintes formas quadráticas, em definidas positivas, semidefinidas positivas, definidas negativas, semidefinidas negativas ou indefinidas:
a) $x^2 + y^2$ b) $-x^2 - 3y^2$ c) $(x-y)^2$ d) $-(x-y)^2$ e) $x^2 - y^2$ f) xy
g) $3x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + yz$ h) $3x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xz + 8yz$
i) $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2xz - yz - 2xy$

6.17 Verificar a positividade do candidato a produto interno em P_2:
$\langle p(t), q(t) \rangle = 3a_1b_1 + 4a_2b_2 + a_3b_3 + a_1b_3 + a_3b_1 + 2a_2b_1 + 2a_1b_2$
em que $p(t) = a_1 + a_2t + a_3t^2$ e $q(t) = b_1 + b_2t + b_3t^2$.

6.18 Classificar as seguintes matrizes, em definidas positivas, semidefinidas positivas, definidas negativas, semidefinidas negativas ou indefinidas:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$

6.19
Encontrar formas canónicas reais para as matrizes do problema 6.3 que não sejam diagonalizavéis

6.20 Encontrar formas canónicas de Jordan para as seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

6.21 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

a) Prove que A é diagonalizável numa matriz real se $(a-d)^2 + 4bc > 0$
b) Prove que A não é diagonalizável numa matriz real se $(a-d)^2 + 4bc < 0$

6.22 Mostre que se $0 < \theta < \pi$, então:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

não tem valores próprios reais, dê uma interpretação geométrica desse facto quando A representa uma transformação linear na base canónica de R^2.