Algumas soluções do capítulo 3.

3.1

a) o vector da alínea i) pertence os outros não.

b) o vector da alínea i) pertence os outros não.

c) $nul\,(A) = 1$, $\dim\,(Imagem) = 1$.

3.2

a) Todos.

b) O primeiro.

c) $nul\,(A) = 1$, $\dim\,(Imagem) = 3$.

d) É sobrejactiva e não injectiva.

3.3

a) O primeiro.

b) O segundo.

c) $nul\,(A) = 0$, $\dim\,(Imagem) = 3$.

d) Não sobrejectiva, injectiva.

3.4

$T\,(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 30 & -10 & -3 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30x_1 - 10x_2 - 3x_3 \\ -9x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}$.

$T\,(1,1,1) = \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix}$.

3.5

a) $T\left(a_1 + a_1x + a_1x^2\right) =$

$a_1 + 3a_2 + 4a_3 + (a_1 + 2a_3)\,x + (-a_2 + 3a_3)\,x^2$

$T\left(-3 + 2x - x^2\right) = -1 - 5x - 5x^2$.

b) É bijectiva, a sua inversa é dada por

$T^{-1}\left(b_1 + b_1x + b_1x^2\right) =$

$\frac{1}{11}\left(-2b_1 + 13b_2 - 6b_3 + (3b_1 - 3b_2 - 2b_3)\,x + (b_1 - b_2 + 3b_3)\,x^2\right)$.

3.6

a) $\ker\,(T) = \mathcal{L}\{(-14, 19, 11)\}$, $\mathrm{Im}\,(T) = \mathcal{L}\{(-1, 5, 7)\,, (-1, 6, 4)\}$.

b) $\ker\,(T) = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}$, $\mathrm{Im}\,(T) = \mathcal{L}\{(2, 4, 0)\,, (-1, 2, 0)\}$.

c) $\ker\,(T) = \mathcal{L}\{(-4, 2, 0, 7)\,, (-1, -1, 1, 0)\}$, $\mathrm{Im}\,(T) = \mathcal{L}\{(4, 1)\,, (1, 2)\}$.

d) $\ker\,(T) = \mathcal{L}\{(-1, -1, 1, 0, 0)\}$,

$\mathrm{Im}\,(T) = \mathcal{L}\{(1, 3 - 1, 2)\,, (4, -2, 0, 3)\,, (0, 0, 0, 1)\,, (0, -1, -1, 8)\}$.

e) Nenhuma é injectiva, em c) e d) as aplicações são sobrejectivas.

3.7 a) $x_1 = -t, x_2 = -t, x_3 = t; t \in \mathbb{R}$.

b) $-14x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0$.

c) Nem injectiva nem sobrejectiva.

3.10 O núcleo deste operador são as funções constantes.

3.11

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. b) O núcleo é a função nula.

c) Dado o polinómio $q\,(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, temos

$T^{-1}\,(q\,(t)) = -\left(\frac{4a_1+2a_2+2a_3+3a_4}{8} + \left(\frac{2a_1+2a_2+3a_3}{4}\right)t + \frac{2a_2+3a_3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^3\right)$.

d) $T^{-1}\left(t^3-2\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}t-\frac{3}{4}t^2-\frac{1}{2}t^3$.

3.14 a) i. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ii. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. iii. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. iv. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

v. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. vi. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) i. $y=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. ii. $y=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. iii. $y=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$. iv. $y=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

v. $y=\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}$ $t\in\mathbb{R}$. vi. Impossível.

3.17 b) É a própria matriz dada! Não é necessário fazer cálculos, porquê?

3.18 a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. b) $x_1=\frac{4+x3}{2}$, $x_2=\frac{-2-x3}{2}$.

3.19 a) Na base canónica $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, nas bases pedidas temos $S=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ no espaço de partida e $S'=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ no espaço de chegada.

Calculando a inversa de S : $S'^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$, sendo o resultado

$$C=S'^{-1}AS=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

b) Ou utilizamos a base canónica e depois convertemos as componentes do transformado de w em termos da base B', ou convertemos o vector dado $w=\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ para a base B e depois usamos a matriz C, o que é pedido no enunciado. Como o vector w tem componentes na base não canónica B: $w_B=S^{-1}w$ repare-se que, o que foi dito, pode ser transcrito em linguagem matemática da seguinte forma:

$$Bw_B=S'^{-1}ASS^{-1}w_c=S'^{-1}Aw_c=\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ \frac{22}{3} \end{bmatrix}.$$

3.20 a) Na base canónica $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, temos $S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e $S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Finalmente: $C = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

b) Atenção, no enunciado deve entender-se o vector dado como escrito na base B, significa que se tem $2u_1 + 0u_2 + 0u_3 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, o que não está claro no enunciado fornecido, será corrigido nas próximas versões dos exercícios. O vector w é assim na base canónica: $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Usa-se directamente a matriz C multiplicada.por $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, uma vez que estas são as componentes de w na base B. Resultado: $2u_1 - 2u_2 + 0u_3$.

c) Não, o vector dado não pertence à imagem de T.

3.21 a) Neste caso é imediato, como temos a matriz da transformação na base B as suas colunas são as componenetes das imagens dos elementos da base:

$T(\nu_1) \underset{B}{\circlearrowleft} \{1, -2\}, T(\nu_2) \underset{B}{\circlearrowleft} \{3, 5\}$

b) Como $SA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 29 \end{bmatrix}$, $T(\nu_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $T(\nu_2) = \begin{bmatrix} -5 \\ 29 \end{bmatrix}$.

c) $T(\{x_1, x_2\}) = \left\{ \frac{18x_1 + x_2}{7}, \frac{-107x_1 + 24x_2}{7} \right\}$.

d) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{83}{7} \end{bmatrix}$.

e) $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. f) Na base canónica $x_1 = -\frac{25}{77}, x_2 = -\frac{89}{77}$.

3.22 Nota: este exercício é simples, no entanto as contas são algo demoradas, sugere-se a utilização de um programa como o Maple ou o Mathematica que será sempre útil ao aluno, embora não substitua o raciocínio.

a)

$T(\nu_1) \underset{B'}{\circlearrowleft} \{3, 1, -3\}, T(\nu_2) \underset{B'}{\circlearrowleft} \{-2, 6, 0\},$

$T(\nu_3) \underset{B'}{\circlearrowleft} \{1, 2, 7\}, T(\nu_4) \underset{B'}{\circlearrowleft} \{0, 1, 1\}.$

b) $S' = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -6 \\ 2 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Para passar à base canónica basta multiplicar cada vector escrito na base B' por S' :

$S' \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix}$ o que significa que $T(\nu_1) = 11 - 13t + 4t^2$.

$S' \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 \\ 44 \\ 2 \end{bmatrix}$ o que significa que $T(\nu_1) = -42 + 44t + 2t^2$.

$S'\begin{bmatrix}1\\2\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-56\\81\\11\end{bmatrix}$ o que significa que $T(\nu_1)=-56+81t+11t^2$.

$S'\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13\\17\\2\end{bmatrix}$ o que significa que $T(\nu_1)=-13+17t+2t^2$.

c) Calcula-se S^{-1} a representação matricial, na base canónica, da transformação T será $B=S'AS^{-1}$ depois deste cálculo obtém-se:

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right)=\begin{matrix}\frac{1}{10}(253x_1+98x_2+241x_3-229x_4)+\\ \frac{1}{10}(89x_1+66x_2-283x_3+87x_4)\,t+\\ \frac{1}{5}(87x_1-72x_2-24x_3+116x_4)\,t^2\end{matrix}.$$

d) $-\frac{31}{2}+\frac{31}{2}t+3t^2$.

3.35 a) $\begin{bmatrix}0&1&1&0\\-1&0&0&1\\-1&0&0&1\\0&-1&-1&0\end{bmatrix}$.

b) Base de $\ker(T)=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$.

c) Base de $\operatorname{Im}(T)==\left\{\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\}$.

d) $S=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$, $S^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

$B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&0&-2\\0&1&1&0\end{bmatrix}$.

3.38

a) $A=\begin{bmatrix}3&0&0&4\\0&3&4&0\\0&4&-3&0\\4&0&0&-3\end{bmatrix}$. b) $A^{-1}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}3&0&0&4\\0&3&4&0\\0&4&-3&0\\4&0&0&-3\end{bmatrix}$.

c) $x=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}-1\\-2\\14\\7\end{bmatrix}$.