Algumas soluções do capítulo 6

6.1 a) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $v_1 = (0,1)$, $v_2 = (1,2)$.

b) $\lambda_1 = 4$, $v_1 = (3,2)$.

c) $\lambda_1 = -2\sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2\sqrt{3}$, $v_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, $v_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

d) $\lambda_1 = -i\sqrt{3}$, $\lambda_2 = i\sqrt{3}$, $v_1 = \left(-2 - i\sqrt{3}, 1\right)$, $v_2 = \left(-2 + i\sqrt{3}, 1\right)$.

e) $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$.

f) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$.

6.2 Rectas que passam pela origem e cujos vectores directores são os vectores próprios. Na alínea $f)$ estas rectas pertencem a $\mathbb{C}^2$ e não se representam graficamente.

6.3 a) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = (-1,2,2)$, $v_3 = (-1,1,1)$.

b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = \sqrt{2}$, $v_1 = (5,1,3)$, $v_2 = \left(\frac{5\left(-4+3\sqrt{2}\right)}{-6+5\sqrt{2}}, \frac{-2+\sqrt{2}}{-6+5\sqrt{2}}, 1\right)$, $v_3 = \left(\frac{5\left(4+3\sqrt{2}\right)}{6+5\sqrt{2}}, \frac{2+\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}}, 1\right)$.

c) $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$, $v_1 = (1,-1,6)$, $v_2 = (10+5i, -18-24i, 25)$, $v_3 = (10-5i, -18+24i, 25)$.

d) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $v_1 = (1,1,3)$,
$v_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5+i\sqrt{3}}{26}, 1\right)$, $v_3 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5-i\sqrt{3}}{26}, 1\right)$.

e) $\lambda_1 = 2$, $v_1 = -(1,-1,3)$.

f) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, $v_1 = (-6,8,3)$, $v_2 = (5,-2,1)$.

6.4 a) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ este v.p. é duplo, $E_1 = \mathcal{L}\{(-1,0,1,0)\}$, $E_2 = \mathcal{L}\{(-2,1,1,0)\}$, $E_3 = \mathcal{L}\{(2,3,1,0),(0,0,0,1)\}$.

b) $\lambda_1 = 4$, este v.p. é duplo, $\lambda_2 = -i\sqrt{3}, \lambda_3 = i\sqrt{3}$.
$E_1 = \mathcal{L}\{(3,2,0,0)\}$, $E_2 = \mathcal{L}\left\{\left(0,0,-2-i\sqrt{3},1\right)\right\}$,
$E_3 = \mathcal{L}\left\{\left(0,0,-2+i\sqrt{3},1\right)\right\}$.

6.5 a) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, este v.p. é duplo,

b) $E_1 = \mathcal{L}\left\{\left(-6+8x+3x^2\right)\right\}$, $E_2 = \mathcal{L}\left\{5-2x+x^2\right\}$.

6.6 Isomorfo ao 6.4 a) com a resalva na alínea b) que agora os espaços próprios são gerados por matrizes 2×2:

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}, E_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \\ E_3 &= \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

6.7 Se existir um valor próprio nulo a equação característica tem termo independente nulo, que como sabemos é o determinante da matriz original.

6.8 a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, cada espaço próprio tem dimensão 1.

b) $\lambda_1 = -3$, duplo, como a matriz é simétrica (logo diagonalizável) o espaço próprio associado tem dimensão 2, $\lambda_2 = 6$, simples e o espaço próprio associado tem dimensão 1.

c) $\lambda_1 = 0$, duplo, como a matriz é simétrica (logo diagonalizável) o espaço próprio associado tem dimensão 2, $\lambda_2 = 3$, simples e o espaço próprio associado tem dimensão 1.

d) $\lambda_1 = 6$, duplo, como a matriz é simétrica (logo diagonalizável) o espaço próprio associado tem dimensão 2, $\lambda_2 = 0$, simples e o espaço próprio associado tem dimensão 1.

e) $\lambda_1 = 0$, triplo, como a matriz é simétrica (logo diagonalizável) o espaço próprio associado tem dimensão 3, $\lambda_2 = 8$, simples e o espaço próprio associado tem dimensão 1.

6.9 a) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ d) Se $b = 0$ temos $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, se $b \neq 0$ teremos $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

6.10 1. $\lambda_1 = 0$, $v_1 = (-\xi_2, \xi_1)$

2. $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (\xi_1, \xi_2)$

4. a) Atenção, existe uma gralha no enunciado, na posição de índice 33 da matriz A, deve ler-se 5 em vez de 1. A afirmação justifica-se porque A é simétrica.

b) Não obtenha a matriz ortogonal, o exercício é trabalhoso porque existe um espaço próprio de dimensão 2 para o qual é necessário obter uma base ortonormada pelo método de Gram-Schmidt, basta uma matriz diagonalizante qualquer. Exemplo $S = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(continua)