Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 1 - 3 DE NOVEMBRO DE 2007 - DAS 9H ÀS 10:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $f(x+iy) = \cos(x)\,\mathrm{ch}(y) - i\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.

[1 val.] (a) Mostre que f é analítica em $\mathbb{C}$.

Res: Uma condição necessária para que f seja analítica em $\mathbb{C}$ é que verifique as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$. De facto, tem-se:

$$\frac{\partial u}{dx} = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{ch}(y) = \frac{\partial}{dy},$$

e

$$\frac{\partial u}{dy} = \cos(x)\,\mathrm{sh}(y) = -\frac{dv}{dx}.$$

Por outro lado, as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, têm derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ o que conjuntamente com as condições de Cauchy-Riemann garante que $f = u + iv$ á analítica em $\mathbb{C}$.

[1 val.] (b) Calcule $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\,dz$.

Res: Pela alínea anterior, e atendendo à fórmula integral de Cauchy para a 1≫ derivada, temos que:

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\,dz &= 2\pi i f'(0) = 2\pi i[\tfrac{\partial u}{dx} + i\tfrac{dv}{dx}]_{(x,y)=(0,0)} \\ &= 2\pi i[\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{ch}(y) - i\cos(x)\,\mathrm{sh}(y)]_{(x,y)=(0,0)} \\ &= 2\pi i[0+0i] = 0.\end{aligned}$$

[1 val.] 2. Calcule a série de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$ em torno de $z_0 = 1$ e determine o seu raio de convergência.

Res: Como

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2},$$

e

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-(-(\frac{z-1}{2}))}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},$$

desenvolvimento válido para $|z-1| < 2$,

e, similarmente

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-(-(\frac{z-1}{3}))}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}},$$

desenvolvimento válido para $|z-1| < 3$, temos que:

o raio de convergência da série pedida é 2 e esta é:

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}](z-1)^n,$$

para $|z-1| < 2$.

3. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ definida em $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

   (a) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $0 < |z| < 1$. [1

   Res: Tendo em conta que

   $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

   para $|z| < 1$, logo se conclui que:

   $$\frac{1}{z^2(1-z)} = z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2},$$

   desenvolvimento válido para $0 < |z| < 1$.

   (b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $1 < |z| < \infty$. [1

   Res: Tendo em conta que

   $$\frac{1}{z^2(1-z)} = -z^{-2}\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}},$$

   para $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, o desenvolvimento pedido é

   $$\frac{1}{z^2(1-z)} = -z^{-2}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+3)},$$

   para $|\frac{1}{z}| < 1 \equiv |z| > 1$.

   (c) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular [1

   $$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz.$$

   Res:
   (Com recurso total às alíneas anteriores).

   O desenvolvimento obtido na alínea 3.b) é válido para $1 < |z| < \infty$ e o contorno $C = \{|z| = 2\}$ está contido nessa região (onde f é analítica). Os coeficientes desse desenvolvimento são dados por:

   $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz,$$

   para $n \in \mathbb{Z}$.
   Em particular, o coeficiente a_{-1} da série calculada em 3.b) dá-nos (a menos de $2\pi i$) o valor do integral pedido. Mas, como $a_{-1} = 0$, concluímos que $\oint_{|z|=2} f(z)\, dz = 0$.

   Res. alternativa:
   (Com recurso parcial às alíneas anteriores)

Podemos considerar que

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz + \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz.$$

O primeiro integral é obtido à custa do coeficiente a_{-1} da série calculada na alínea 3.a), ou seja

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i.$$

Por outro lado, pelo Teorema dos resíduos,

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i \text{ res } f(z=1)) = -2\pi i,$$

uma vez que, sendo

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{-1}{z^2} = -1,$$

concluímos imediatamente que f tem um pólo simples em $z = 1$ e que res $f(z = 1) = -1$. Portanto,

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = 0.$$

4. Seja γ_R a curva fechada que limita o semicírculo

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} : 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le \pi\},$$

de raio $R > 2$, percorrida no sentido positivo.

[1 val.] (a) Calcule o integral

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2}.$$

Res: A função tem duas singularidades ($z = -2i, z = 2i$). Como $R > 2$ a singularidade $z = 2i$ está contida na região delimitada por γ_R e consequentemente, pelo Teorema dos residuos:

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = 2\pi i \text{ res } f(z=2i).$$

Uma vez que $(z^2+4)^2 = (z+2i)^2(z-2i)^2$ é fácil ver que f tem um pólo duplo em $z = 2i$ e portanto

$$\text{Res } f(z=2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}[(z-2i)^2 f(z)0 = \frac{2}{4^3 i}.$$

Então,

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

[2 val.] (b) Calcule o integral real

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Atendendo ao facto de termos uma integranda par,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Seja $C_R = \{z = Re^{i\theta}\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$, percorrida no sentido positivo. Podemos então escrever:

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} + \int_{I_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

para qualquer $R > 2$. Como

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+4)^2} = 0,$$

uma vez que a integranda é uma função racional e o grau do polinómio do denominador (4) é maior ou igual que o grau do polinómio do numerador (0) mais 2, temos, passando ao limite na igualdade acima e tendo em conta a definição de integral impróprio, que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,dx. = \frac{1}{32}.$$

5. Seja Ω uma vizinhança de 0, e seja $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica com um zero de ordem 3 em $z = 0$. Mostre que, para δ suficientemente pequeno, se tem [1

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = \pi i \left(\frac{2(g'(0))^2 - g''(0)g(0)}{g^3(0)} \right)$$

onde $g(z) = f(z)/z^3$.

Res: Uma vez que f tem um zero de ordem 3 em $z = 0$, é claro que $\frac{1}{f}$ tem nesse ponto uma singularidade isolada, mais precisamente um pólo de ordem 3.

Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno por forma a que $z = 0$ seja a «nica singularidade de $\frac{1}{f}$ contida no disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \delta\}$. Então pelo Teorema dos resíduos temos que

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i\ Res\ (\frac{1}{f})_{z=0}.$$

Atendendo ao facto de $z = 0$ ser um pólo de ordem 3 de $\frac{1}{f}$, concluímos que

$$\oint_{|z|=\delta} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}[\frac{z^3}{f}] = \pi i \lim_{z\to 0} \frac{d^2}{dz^2}[\frac{1}{g}].$$

Derivando duas vezes $\frac{1}{g}$ e passando ao limte quando $z \to 0$ (e tendo em conta que temos uma função contínua), obtemos imediatamente o resultado.