Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Cursos: MEIC, LMAC, LEFT, MEBIOL

Ficha de Trabalho 10

1. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial
$$\begin{cases} y' = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$
diferente da solução $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

2. Considere a equação
$$\frac{dy}{dt} = \cos(t + e^y).$$
   (a) Justifique que a solução de qualquer problema de valor inicial $y(t_0) = y_0$ é única.
   (b) Mostre que a solução do problema de valor inicial $y(0) = 0$ satisfaz $-t \leq y(t) \leq t$ para $t \geq 0$.
   (c) Mais geralmente mostre que $|y(t) - y_0| \leq |t - t_0|$ para todo o t.
   (d) Determine os intervalos máximos de definição das soluções desta equação.

3. Considere o problema de valor inicial
$$\frac{dy}{dt} = 1 + \cos(\sin t + y) + y^2 \quad y(0) = 1.$$
   (a) Justifique que a solução do problema de valor inicial é única.
   (b) Mostre que existe $0 < c \leq 1$ tal que $\lim_{t \to c^-} y(t) = +\infty$ (ou seja, que a solução explode antes de $t = 1$).

4. Majorando e minorando as seguintes equações, obtenha estimativas para os intervalos máximos de definição dos problemas de valor inicial indicados.
   (a) $\frac{dy}{dt} = \operatorname{arctg}(ty), \quad y(0) = 2.$
   (b) $\frac{dy}{dt} = \cos(t + y)(1 + y^2), \quad y(1) = 1.$
   (c) $\frac{dy}{dt} = \frac{e^{\cos(ty)}}{y^3}, y(0) = 1.$
   (d) $\frac{dy}{dt} = y^2 e^y, \quad y(0) = -1$ (note que a função constante igual a 0 é uma solução da equação).

5. Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções das seguintes equações diferenciais.

   (a) $y' = \frac{ty}{1+t^2}$;
   (b) $y' = (2-y)(y-1)$;
   (c) $y' = \operatorname{sen} y$;
   (d) $y' = \frac{t-y}{t+4y}$.