

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Cursos: LMAC, LEFT, MeBiom, LEIC

Ficha de Trabalho 11

1. Determine e^{At} para as seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$,

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(f) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determine e^{At} e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = (0, -1, 0)$.

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & -\pi \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)$.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = (2, -1, 2)$.

5. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

Sugestão: determine uma solução particular constante.

6. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{At} .

(b) Determine a solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(0) = (0, 1, 1) \end{cases}$$

$$\text{onde } \mathbf{b}(t) = (0, e^{t\sqrt{2}}, e^{-t})$$

7. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Resolva o problema.

8. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = 2x - y \\ \dot{z} = y - e^{-t}z \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) - 1 = z(0)$.

Sugestão: note que as primeiras duas equações não mencionam z .

9. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp \left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sugestão: mostre que $X(t) = e^{-At} e^{(A+B)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.