Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Cursos: LMAC, LEFT, MeBiom, LEIC

Ficha de Trabalho 13

1. Determine a solução da equação $y'' - y = \frac{1}{1+e^{2t}}$ que satisfaz $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$.

2. Considere a equação diferencial
$$y'' + \frac{t}{1-t}y' + \frac{1}{t-1}y = 1 - \frac{1}{t}.$$
   (a) Determine soluções da equação homogénea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$.
   (b) Ache a solução do problema de valor inicial $y(2) = 1,\ y'(2) = -1$.

3. Calcule as transformadas de Laplace das funções definidas em $t \geq 0$ pelas expressões seguintes:
   (a) $f(t) = \mathrm{ch}(at)$,
   (b) $f(t) = t\,\mathrm{sen}(at)$,
   (c) $f(t) = e^{at}\cos(bt)$,
   (d) $f(t) = -t^3 + t^2\,\mathrm{sen}\,t$,
   (e) $f(t) = \frac{\mathrm{sen}(t)}{t}$,
   (f) $f(t) = \delta(t-1) + t^4$,
   (g) $f(t) = H(t-1) - tH(t-2)$,
   (h) $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq 1; \\ e^{-2t} & \text{se } t > 1, \end{cases}$
   (i) $f(t) = |\,\mathrm{sen}\,t|$ (Escreva a função em termos da função de Heaviside).

4. Calcule a inversa da Transformada de Laplace de
   (a) $\frac{1}{(s^2-1)^2}$,
   (b) $\frac{1}{6(s^4+10s^2+9)}$,
   (c) $e^{-2s}\frac{2s-3}{s^2+1}$,
   (d) $\frac{s+1}{s^2+s-6}$,
   (e) $\frac{1}{(s-1)^5}$,
   (f) $\frac{e^s}{s} + \frac{e^{-3s}}{s-1}$,
   (g) $\log\frac{s+1}{s-1}$.
   (h) $\arctan(s-2)$

5. Utilizando a Transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial:
   (a) $y'' + \omega^2 y = \cos(2t)$, $\omega^2 \neq 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
   (b) $y''+2y'+2y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ com $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{se } 0 \leq t < \pi \text{ e } t \geq 2\pi \end{cases}$

(c) $y'' + 2y' + y = f(t)$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$ com $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se } t > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

(d) $y'' - 2y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, com $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ t & \text{se } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{se } t \geq 2, \end{cases}$

(e) $y'' + 2y' + y = 2\delta(t-1) - \delta(t-2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

(f) $y'' + 2y' + y = e^{-t} + 3\delta(t-3)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

6. Dadas $f, g\colon [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ define-se o *produto de convolução* de f e g por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du.$$

(a) Calcule $1 * t^k$.

(b) Mostre que $f * g = g * f$.

(c) Mostre que $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$.