Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Cursos: LMAC, LEFT, MEBiom, LEIC

Ficha de Trabalho 14

1. Determine o desenvolvimento em série de Fourier das seguintes funções.
   (a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } -2 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{se } 0 < x \leq 2, \end{cases}$
   (b) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ em $[-\pi, \pi]$,
   (c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 3 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$
   (d) $f(x) = \cos^4(x)$ em $[-\pi, \pi]$.
2. Considere a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$
   (a) Calcule a série de Fourier da função e indique para que valores converge a série em $[-1, 1]$.
   (b) Desenvolva a função constante igual a 1 em $[0, 1]$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.
3. Determine a série de senos de
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x & \text{se } \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$
4. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:
   (a) A série de senos de f.
   (b) A série de cosenos de f.
   (c) A série de Fourier de f (note que o intervalo não está centrado em 0!).
5. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (t \geq 0, x \in [0,1]) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 1 \end{cases}$$
onde c é um parâmetro real.

7. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (t \geq 0, x, y \in [0,1]) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

8. Resolva a equação
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \quad (x \in]0,\pi[) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(0,x) = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

9. Resolva a equação
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \quad (x \in [0,2\pi]) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0, \\ u(0,x) = x. \end{cases}$$