

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho da 3ª Aula Prática

Séries

1. Escreva uma expressão da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para:

$$(i) \frac{1}{2z+5}, \quad (ii) \frac{1}{1+z^4}, \quad (iii) \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$(iv) \frac{1}{1-z+z^2}, \quad (v) \frac{1}{(z+1)(z+2)}, \quad (vi) \frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}.$$

In cada caso indique onde a expressão é validada.

2. Escreva uma expressão para (i) $(1-z)^{-1}$ e (ii) $1/(z(z+2))$ como potências de (a) $z+1$ e (b) $z-i$.

3. Determine o raio de convergência de:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n / n^3, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} z^{5n}, \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} z^n / n^n, \quad (iv) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

4. Determine para quais valores de z as séries seguintes convergem absolutamente:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^n}, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n, \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} (z^n + z^{-n}), \quad (iv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}.$$