Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho da 2ª Aula Prática

Funções analíticas

1. Verifique que (i) $\operatorname{Im} z$ e (ii) $\bar{z}$ não satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em qualquer ponto $x + iy = z \in \mathbb{C}$.

2. Considere a função f dada por

$$f(z) = \begin{cases} z^5/|z|^4 & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

   Mostre que f verifica as equações de Cauchy-Riemann no ponto $z = 0$ mas não é diferenciavel neste ponto.

3. Considere a função $f(z) = z^3$. Mostre que não existe nenhum ponto c no segmento de recta $\{(1-t)1 + ti, t \in [0,1]\}$, tal que

$$\frac{f(i) - f(1)}{i - 1} = f'(c).$$

4. Dá exemplos de:

   (i) uma função analítica em $\mathbb{C}\backslash\{1, -1\}$;

   (ii) uma função analítica f em $\mathbb{C}$ tal que $1/f$ não é analítica em $\{z_1, \ldots z_6\}$, em que $z_1, \ldots, z_6$ são pontos distintos de $\mathbb{C}$;

   (iii) uma função $f = u + iv$, em que u, v não são constantes, que não é analítica nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

5. Para uma função f, seja $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$. Determine $Z(f)$ para as funções:

$$\text{(i)}\ (z^4 - 1)\operatorname{sen} \pi z, \quad \text{(ii)}\ \cosh^2 z, \quad \text{(iii)}\ 1 + e^{2z},$$

$$\text{(iv)}\ \operatorname{sen}^3(1/z)\ (z \neq 0), \quad \text{(v)}\ 1 - e^{z^2}, \quad \text{(vi)}\ 1 + e^{z^2}.$$